N° D'ORDRE
3E.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LOUIS ANTOINE,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

1re THÈSE. — SUR L'HOMÉOMORPHIE DE DEUX FIGURES ET DE LEURS VOISINAGES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juillet 1921, devant la Commission d'examen.

MM. LEBESGUE, *Président.*
FRÉCHET,
VILLAT, } *Examinateurs.*
VALIRON,

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1921

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550001_0012

N° D'ORDRE :
3E.

87800.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. LOUIS **ANTOINE**,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

1re THÈSE. — SUR L'HOMÉOMORPHIE DE DEUX FIGURES ET DE LEURS VOISINAGES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juillet 1921, devant la Commission d'examen.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MM. LEBESGUE, *Président.*
FRÉCHET,
VILLAT,
VALIRON, } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1921

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG.

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

	MM.	
Doyen	BATAILLON (E.)	Biologie générale.
Professeurs	DENJOY (A.)	Mathématiques générales.
	VALIRON (G.)	Calcul différentiel et intégral.
	VILLAT (H.)	Mécanique.
	FRÉCHET (M.)	Analyse supérieure.
	ESCLANGON (E.)	Astronomie.
	WEISS (P.)	Physique générale.
	OLLIVIER (H.)	Physique générale.
	ROTHÉ (E.)	Physique du Globe.
	MULLER (P.)	Chimie générale et Chimie physique.
	HACKSPILL (L.)	Chimie minérale.
	GAULT (H.)	Chimie organique.
	TOPSENT (E.)	Zoologie et Anatomie comparée.
	HOUARD (C.)	Botanique.
	TERROINE (E.)	Physiologie générale.
	DE LAPPARENT (J.)	Pétrographie.
	GIGNOUX (M.)	Géologie et Paléontologie.
Secrétaire	RENARD (A).	

65318 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, Quai des Grands-Augustins, 55.

A

MONSIEUR HENRI LEBESGUE

Hommage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

L'HOMÉOMORPHIE DE DEUX FIGURES

ET

DE LEURS VOISINAGES

INTRODUCTION.

Du point de vue de l'*Analysis Situs*, on ne considère pas comme distinctes deux figures F et f s'il est possible d'établir entre ces figures une correspondance ponctuelle qui soit univoque et continue dans les deux sens. On dit alors que ces figures sont homéomorphes. Mais l'identité des deux figures F et f apparaît comme plus parfaite, lorsqu'il est possible d'étendre la correspondance entre ces figures à des points qui n'en font pas partie. Dans cet ordre d'idées, en supposant que F est située dans un espace E et f dans un espace e, nous chercherons à déterminer deux nouvelles figures F_1 et f_1, situées respectivement dans E et e et ayant les propriétés suivantes :

a. F_1 contient F; f_1 contient f; F_1 et f_1 sont homéomorphes et la correspondance entre F et f est un cas particulier de la correspondance entre F_1 et f_1;

b. Tout point de F est centre d'une hypersphère de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartient à F_1 et tout point de f est centre d'une hypersphère de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartient à f_1.

En raison de l'invariance du nombre de dimensions d'un espace, ce problème n'a de sens que si les espaces E et e ont le même nombre de dimensions. Trois cas sont alors possibles :

1° On peut prendre pour F_1 tout l'espace E et pour f_1 tout l'espace e. Nous dirons alors que la correspondance entre F et f s'étend à la totalité de leurs espaces;

2° On peut déterminer F_1 et f_1, mais on ne peut pas prendre pour ces figures tout E et tout e. Nous dirons que la correspondance entre F et f s'étend à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace;

3° Il est impossible de déterminer deux figures F_1, f_1 satisfaisant aux conditions a et b ci-dessus. Nous dirons que la correspondance entre F et f ne peut s'étendre à aucun voisinage, ou encore que ces figures sont *homéomorphes seulement en elles-mêmes.*

Étant données deux figures homéomorphes situées dans des espaces ayant le même nombre de dimensions, le problème fondamental qui se pose consiste à chercher dans lequel de ces trois cas se trouvent les deux figures. L'objet de ce travail est l'étude de ce problème dans quelques cas particuliers simples. Nous nous bornerons à l'espace à deux et à l'espace à trois dimensions et aux figures formées soit de courbes de Jordan sans point multiple, soit d'ensembles parfaits partout discontinus bornés.

La première Partie est consacrée aux courbes de Jordan sans point multiple. On appelle *courbe de Jordan dans l'espace à n dimensions*, l'ensemble des points dont les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'expriment en fonctions continues d'un paramètre t qui prend toutes les valeurs d'un certain intervalle (α, β) (extrémités comprises), qu'on peut toujours supposer être l'intervalle (0, 1). C'est ce que nous ferons dorénavant.

Une courbe de Jordan est dite *ouverte* et *sans point multiple*, ou encore est dite *un arc de Jordan* si, quels que soient t' et t'' distincts dans l'intervalle (0, 1) les deux points de la courbe correspondants sont distincts. La courbe est dite *fermée* et *sans point multiple*, si les mêmes conditions sont réalisées, sauf pour le point de paramètre 0 et le point de paramètre 1 qui sont confondus.

Deux arcs de Jordan sans point multiple sont homéomorphes.

Car, pour réaliser la correspondance, il suffit d'associer les points donnés par une même valeur de t.

On définit de même la correspondance qui prouve l'homéomorphie de deux courbes de Jordan fermées sans point multiple.

Le Chapitre I étudie les courbes planes. Je démontre que deux telles courbes (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées) sont dans le cas 1°, c'est-à-dire que leur correspondance peut s'étendre à la totalité de leurs plans. Cette propriété a déjà été établie par plusieurs Auteurs et la correspondance a même été réalisée par représentation conforme (1). La méthode que j'emploie a l'avantage de ne faire intervenir que des considérations tout à fait élémentaires, comme celle des chaînes qui ont été définies par M. de la Vallée Poussin et dont je rappelle les propriétés à la Section II. La considération de ces chaînes m'amène à réaliser des correspondances entre polygones plans et ce sont ces correspondances que j'étudie tout d'abord à la Section I. J'indique à la fin du Chapitre diverses applications immédiates des résultats obtenus. En particulier, je prouve que, étant données, dans un même plan, deux courbes de Jordan sans point multiple (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées), on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue du plan n'altérant qu'une région bornée de ce plan. Cette propriété sera fréquemment utilisée dans la suite.

Le Chapitre II est consacré aux courbes de Jordan de l'espace à trois dimensions. *Ici, chacun des trois cas prévus peut effectivement se présenter.* Si l'on considère des courbes ouvertes tracées sur un plan, une sphère ou un tore, on est toujours dans le cas 1°. Il en est de même si l'on considère des courbes fermées planes ou sphériques. Si l'on considère une courbe fermée C tracée sur un tore et une courbe c tracée sur un plan, une sphère ou un tore, on se trouve au moins dans le cas 2°, mais on n'est pas toujours dans le premier

(1) Voir les travaux de M. Carathéodory (*Math. Ann.*, Bd **72**, 1912, p. 107, et Bd **73**, 1913, p. 307 et 323). Au sujet de la correspondance homéomorphe entre domaines plans et des déformations homéomorphes du plan, on pourra consulter des travaux de M. Tietze (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 509; *Rend. del Circ Mat. di Palermo*, t. 38, 1914, p. 247).

cas. Si nous prenons pour c une circonférence, et que nous cherchions les conditions nécessaires et suffisantes pour que la correspondance entre C et c s'étende à tout l'espace, nous devons faire intervenir les coefficients d'enlacement α et β de C avec l'axe et le lieu des centres des méridiens du tore qui porte C. Nous trouverons alors que la condition cherchée est que l'un au moins des nombres α et β soit égal à 0 ou à 1. Quand les nombres α, β sont différents de 0 et de 1, ces deux nombres sont premiers entre eux.

Lorsque deux des courbes dont il vient d'être parlé sont dans le même espace et que leur correspondance peut s'étendre à la totalité de l'espace, on peut encore passer de l'une à l'autre par une déformation continue n'intéressant qu'une région bornée de l'espace.

De la considération des courbes tracées sur le tore, je déduis (Section IV) un arc de Jordan Γ dont la correspondance avec un segment de droite ne s'étend à aucun voisinage. Cette propriété est due à la forme de Γ au voisinage d'un point remarquable, et je montre que tout arc de Γ ayant ce point comme point intérieur (au sens strict) ne peut pas être tracé sur une surface sans point multiple; en donnant au mot *surface* le sens qu'il a ordinairement en *Analysis Situs*.

J'indique enfin à la Section V une autre singularité : *l'existence de deux courbes non enlacées et telles cependant que chacune soit coupée par toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant l'autre pour frontière.*

Les démonstrations données dans ce Chapitre s'appuient sur quelques remarques relatives aux courbes enlacées et aux surfaces simplement connexes. Ces remarques s'étendent à un espace quelconque et je les établis à la Section I dans toute leur généralité.

Dans la deuxième Partie, j'étudie le même problème pour les ensembles parfaits partout discontinus bornés.

Le Chapitre I est une étude des propriétés générales des ensembles fermés discontinus. J'y indique un procédé permettant de définir très simplement tout ensemble de cette nature dans un espace quelconque. Il en résultera immédiatement : 1° *qu'un ensemble parfait borné, partout discontinu, est toujours situé sur un*

arc de Jordan sans point multiple; 2° *que deux tels ensembles sont homéomorphes* (1). Le fait qu'un ensemble parfait discontinu est situé sur un arc de Jordan laisse prévoir les différences profondes qui existent entre ces ensembles, au point de vue du problème qui nous occupe, suivant qu'on les considère dans un espace à deux ou dans un espace à trois dimensions.

Dans le cas des ensembles plans (Chap. II), *la correspondance peut s'étendre à tout le plan* et peut être réalisée par des procédés analogues à ceux décrits pour le cas des courbes de Jordan.

Pour le cas de l'espace à trois dimensions (Chap. III), *je donne des exemples réalisant les trois cas possibles.* Je définis un ensemble discontinu P dont la correspondance avec un ensemble situé sur une droite ne peut s'étendre à aucun voisinage. Ce fait tient à ce que P jouit d'une propriété assez curieuse et d'allure paradoxale : *l'ensemble discontinu* P *est coupé par toute surface simplement connexe sans point multiple, qui contient, à son intérieur, des points de* P *sans les contenir tous.*

Je déduis encore de P deux ensembles discontinus P_1, P_2 dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.

Il en résulte les mêmes propriétés pour les arcs de Jordan qui contiennent ces ensembles P, P_1, P_2. Nous avons ainsi un nouvel exemple de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes et un exemple de deux arcs tels que la correspondance ne puisse s'étendre qu'à leurs voisinages et pas à tout l'espace.

Enfin, de la propriété énoncée sur P, je déduis un exemple, plus frappant encore de la singularité signalée à la fin de la première Partie : une circonférence C et un *arc* de Jordan C′ tels que toute calotte simplement connexe sans point multiple, ayant C pour frontière, coupe C′; il y a une infinité non dénombrable de points d'intersection qui sont situés sur l'ensemble discontinu P.

---

(1) Ces deux propriétés ont déjà été signalées, il y a une dizaine d'années, par M. Denjoy. Sa démonstration diffère légèrement de celle que j'indique. Cette démonstration n'a pas été publiée, mais M. Denjoy a bien voulu me la communiquer. Je tiens à l'en remercier ici.

Les singularités signalées montrent des différences très profondes entre l'espace à deux dimensions et l'espace à trois dimensions. On voit pourquoi des problèmes, très simples dans le cas de deux dimensions, deviennent tout de suite très compliqués quand on les aborde dans toute leur généralité pour l'espace à trois dimensions.

Il me reste en terminant à témoigner ma bien vive gratitude à M. Lebesgue, qui a bien voulu orienter les débuts de ce travail et qui ne m'a jamais ménagé ses précieux conseils.

PREMIÈRE PARTIE.

LES COURBES DE JORDAN.

CHAPITRE I.

LES COURBES PLANES.

I. — Correspondance entre les polygones plans.

1. Je vais démontrer élémentairement le théorème suivant : Soient deux polygones plans P et p limités respectivement par deux contours polygonaux L et l sans point multiple et ayant le même nombre de sommets. P et p *sont homéomorphes* et la correspondance entre P et p peut être réalisée de manière que :

1° L *et* l *se correspondent côté à côté, sommet à sommet, la correspondance entre deux côtés étant une similitude ;*

2° P *et* p *peuvent être décomposés en un nombre fini de triangles se correspondant par homographie.*

Un cas particulier très simple, auquel je ramènerai le cas général, est celui où L et l n'ont que trois sommets. P et p sont alors des

triangles. Il existe une correspondance homographique (et d'ailleurs une seule) faisant correspondre ces triangles sommet à sommet, côté à côté, la correspondance entre côtés étant une similitude. Cette correspondance homographique donne la solution du problème.

2. Supposons maintenant P et p quelconques. Pour simplifier je considère un polygone convexe p' limité par un contour l' ayant autant de sommets que L et l. Si je peux établir la correspondance indiquée au n° 1 entre P (qui est quelconque) et p', elle pourra aussi s'établir entre p et p' et il en résultera la correspondance cherchée entre P et p.

Je montrerai dans un instant que si P a plus de trois côtés, on peut, en joignant deux points M_1, M_2, convenablement choisis sur L, le décomposer en deux polygones P_1, P_2 ayant chacun moins de côtés que P. La droite joignant les deux points m'_1, m'_2 de l' qui sont homologues de M_1, M_2, décomposée p' en p'_1 et p'_2.

Il suffit de réaliser la correspondance demandée pour P_1 et p'_1 d'une part, pour P_2 et p'_2 d'autre part, pour que la correspondance entre P et p' en résulte.

On est ainsi ramené au cas de polygones d'un nombre moindre de côtés et, en continuant ainsi, on aboutira au cas des triangles.

3. Si P a quatre côtés au moins et s'il est convexe, on peut prendre pour M_1 et M_2 deux sommets non consécutifs de L. Si P n'est pas convexe, il a au moins un angle supérieur à deux droits, soit l'angle A. Et soient A, B, C, D, ..., X, Y, Z, A les sommets successifs de L. La demi-droite Ax, prolongement de BA au-delà de A, rencontre P; soit N le premier des points de rencontre quand on va de A vers x. N n'appartient ni à BC, ni à ZA. S'il n'appartient pas non plus à YZ, je peux prendre M_1 en A et M_2 en N.

S'il appartient à YZ, et si le segment AY ne contient pas de points de L, je prends M_1 en A, M_2 en Y. Sinon, en faisant tourner une demi-droite, à partir de Ax, vers Y, il y aura une première position Ay telle qu'en partant de A on rencontre L avant de rencontrer YZ, soit Q le premier point rencontré par Ay à partir

de A; je puis prendre M_1 en A, et M_2 en Q, car Q est un sommet de la ligne CD ... XY.

Ceci conduit parfois à des polygones ayant des côtés consécutifs portés par une même droite, mais ces polygones ne sont nullement exclus de nos considérations. De sorte que nous aurions pu supposer que les deux lignes L et l n'avaient pas initialement le même nombre de côtés, et, en subdivisant les côtés de l'une d'elles, revenir au cas que nous avons étudié ici.

II. — Définition et propriétés des chaînons et des chaînes.

4. M. de la Vallée Poussin a introduit la notion de *chaînon* et de *chaîne* en vue d'une démonstration du théorème de M. Jordan [1]. J'utiliserai ces notions. Je vais rappeler ici les définitions et énoncer les propriétés qui me seront utiles.

Définitions. — Nous appellerons *chaînon* une région du plan d'un seul tenant, limitée par un contour polygonal extérieur unique sans point multiple, et éventuellement percée d'un certain nombre de vides limités par des contours de même nature que le premier.

Considérons un certain nombre de *chaînons consécutifs*, désignés par leurs numéros d'ordre (1), (2), ..., (*n*). Ces chaînons constituent *une chaîne* si deux chaînons consécutifs ont des points ou des parties communes, tandis que deux chaînons non consécutifs ne se touchent pas. Si les chaînons (1) et (*n*) ne se touchent pas, c'est-à-dire sont considérés comme n'étant pas consécutifs, la chaîne est dite *ouverte*, (1) et (*n*) sont alors les *chaînons extrêmes*. Si (1) et (*n*) se touchent, c'est-à-dire sont considérés comme consécutifs, la chaîne est dite *fermée*. Il n'y a plus alors de chaînons extrêmes.

Le domaine comprenant tous les points d'une chaîne ouverte (ou, en abrégé, la *chaîne*) est, comme les chaînons eux-mêmes, un

---

[1] De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, Chap. XIII, p. 374 et suiv.

domaine d'un seul tenant, limité par un contour polygonal extérieur unique, et percé d'un certain nombre de vides. Nous dirons, en abrégé, qu'une région du plan est intérieure à un chaînon ou à une chaîne ouverte, si elle est enfermée dans leur contour extérieur.

Une chaîne sera dite *régulière*, si un chaînon ne peut être enfermé dans un autre, ni dans un groupe de deux autres pris dans la chaîne; lesquels seraient nécessairement consécutifs.

5. THÉORÈME I. — *Si une chaîne fermée est irrégulière, elle est intérieure à une chaîne formée de quatre au plus de ses chaînons.*

THÉORÈME II. — *Tout vide d'une chaîne ouverte est dans l'intérieur d'un groupe de deux chaînons consécutifs.*

THÉORÈME III. — *Le contour extérieur unique d'une chaîne régulière ouverte touche à tous les chaînons, tandis que le contour d'un vide en touche au plus quatre.*

THÉORÈME IV. — *Dans une chaîne régulière ouverte de cinq chaînons au moins, un vide ne peut toucher en même temps aux deux chaînons extrêmes.*

THÉORÈME V. — *Une chaîne fermée, régulière formée de cinq chaînons au moins, est constituée par un anneau intérieur à un contour polygonal* L *et extérieur à un contour polygonal* L′ *contenu dans l'intérieur du premier.*

Cet anneau peut être percé de vides. Mais ces derniers sont chacun intérieurs à un ou deux chaînons consécutifs et en touchent quatre au plus. Au contraire, les régions intérieure et extérieure à l'anneau touchent chacune, l'une par L, l'autre par L′, tous les chaînons.

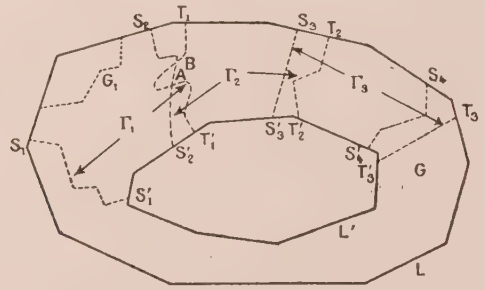
6. Complétons les théorèmes IV et V par les remarques suivantes :

THÉORÈME. — *Sur le contour extérieur* L *d'une chaîne régulière fermée* G *formée des chaînons* G_1, G_2, ..., G_n $(n \geq 5)$, *on peut marquer des points* S_1, T_1, S_2, T_2, ... *appartenant respectivement à*

G_1, G_2, ... *se succédant dans l'ordre* S_1, T_n, S_2, T_1, S_3, T_2, ..., S_n, T_{n-1}, S_1 *et tels que tous les points de* G_i *qui sont sur* L *appartiennent à la portion* $S_i\,T_{i-1}\,S_{i+1}\,T_i$ *de* L. *Sur le contour intérieur* L', *on peut trouver des points analogues* S'_1, T'_1, ...; *il y a accord entre les sens* $S_1\,T_n\,S_2$ *de* L *et* $S'_1\,T'_n\,S'_2$ *de* L'.

Décrivons le contour extérieur de G_1. Nous trouverons au moins une portion allant de L à L' et une allant de L' à L. Soient $S_1\,S'_1$

Fig. 1.



et $T'_1\,T_1$ ces deux parties. Elles ne se coupent pas; elles divisent la chaîne en deux morceaux, dont l'un, que j'appelle Γ_1, est du même côté que G_1 par rapport à $S_1\,S'_1$. Il est limité par $S_1\,S'_1$, un arc $S'_1\,T'_1$ de L', $T'_1\,T_1$ et un arc $T_1\,S_1$ de L.

G_1 *est tout entier dans* Γ_1, puisqu'il a des points dans Γ_1 et qu'il ne traverse pas le contour de Γ_1. A l'intérieur de Γ_1, la frontière de G_1 ne contient aucune autre partie joignant L et L', puisqu'une telle ligne ne pourrait être traversée par G_1 et cependant partagerait Γ_1 en deux parties contenant toutes deux des points de G_1. La frontière de G_1 se compose donc, outre $S_1\,S'_1$ et $T'_1\,T_1$, de deux parties, l'une joignant S'_1 à T'_1, l'autre joignant T_1 à S_1; la première ne contient aucun point de L, la seconde ne contient aucun point de L'. Les portions de Γ_1 qui n'appartiennent pas à G_1 n'ont donc jamais à la fois comme frontière des parties de L et des parties de L'.

Il en résulte *que* G_3, G_4, ..., G_{n-1} *n'ont aucun point dans* Γ_1 puisque, ne contenant aucun point de G_1, ils devraient se trouver dans ces parties de Γ_1 qui ne touchent pas à la fois L et L'. Ni G_2, ni G_n n'est complètement intérieur à Γ_1, car il y a par exemple des

points de G_2 appartenant à G_3. Les deux régions Γ_2 et Γ_n, construites comme Γ_1, ne sont donc pas intérieures à Γ_1.

Supposons que T'_1, qui appartient à G_2 ou à G_n appartienne à G_2. Sinon, on devrait appeler ce point S'_1 et raisonner sur G_n comme nous allons le faire sur G_2. Décrivons $T'_1 T_1$. Nous resterons dans G_2 tant que nous ne rencontrerons pas une frontière de G. Supposons que nous arrivions en A à la frontière γ d'un vide de G. Ce vide touche au plus à quatre chaînons consécutifs de G (n° **3**, V) et comme A appartient à G_1 et à G_2, γ appartient au plus à quatre chaînons consécutifs de la suite $G_{n-1}, G_n, G_1, G_2, G_3, G_4$. Décrivons γ à partir de A dans le sens qui nous fait quitter $T'_1 T_1$ jusqu'à ce que nous revenions en B sur $T'_1 T_1$ et soit γ' l'arc ainsi décrit. γ' ne contient aucun point de G_1 (sauf ses extrémités A et B). La portion de γ' voisine de A appartenant comme A à G_2, tout γ' appartient exclusivement à G_2, G_3, G_4. Mais B appartient à G_1, donc ne peut appartenir à G_3, ni à G_4. Donc la partie de γ' voisine de B appartient à G_2, donc aussi B. En continuant à décrire $T'_1 T_1$ à partir de B, on arrive finalement en T_1 sur G_2.

De même, S_1 et S'_1 appartiennent tous deux soit à G_2, soit à G_n. Je dis qu'ils appartiennent à G_n. Supposons le contraire et considérons la région Γ_2; soient S_2, T_2 les extrémités de l'arc découpé par Γ_2 dans L. S_1 et T_1 appartenant à Γ_2, l'un des deux arcs $S_1 T_1$ de L appartient tout entier à Γ_2. Ce ne peut être l'arc extérieur à Γ_1, car tout point de L appartenant soit à Γ_1, soit à Γ_2, G_4, qui n'a aucun point dans Γ_1 et Γ_2, ne toucherait pas L. Ce ne peut être l'arc $S_1 T_1$ de Γ_1. Car les deux points S_2, T_2 seraient extérieurs à Γ_1 et, par suite, appartiendraient à G_3 et l'un des deux arcs S_2, T_2 de L appartiendrait à Γ_3. Ce ne peut pas être l'arc de Γ_2, puisqu'il contient des points de G_1. Ce ne peut pas être non plus l'autre arc $S_2 T_2$ de L, car tout point de L appartiendrait alors soit à Γ_2, soit à Γ_3, et G_n ne toucherait pas L. Il y a donc contradiction et par suite S_1, S'_1 appartiennent à G_n.

Ainsi, si l'on parcourt L et L′ dans le même sens, on rencontre d'une part S_1, T_n, S_2, T_1 dans cet ordre, et d'autre part S'_1, T'_n, S'_2, T'_1 dans le même ordre, ce qui justifie l'énoncé. Remarquons que S_1 et T_n peuvent être confondus, ainsi que S_2 et T_1.

Pour la suite, remarquons encore que la couronne limitée par L et L′ se trouve divisée en des morceaux $\Gamma_1, \Gamma'_2, \Gamma_3, \Gamma'_4, \ldots$ par les lignes $S_1\ S'_1$; $T_1\ T'_1$; $S_3\ S'_3$; $T_3\ T'_3$; $S_5\ S'_5$, ...

Soient P et Q deux points de L (ou de L′). Soient p et q les rangs des chaînons qui contiennent P et Q. La discussion précédente montre que l'un *des deux arcs* PQ *de* L *n'emprunte de points qu'aux chaînons numérotés* $p-1,\ p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots,\ q-2,\ q-1,\ q,\ q+1$ *et l'autre arc aux chaînons* $q-1,\ q,\ q+1,\ q+2,\ \ldots,\ p-2,\ p-1,\ p,\ p+1$ (dans ces suites, le nombre 1 doit être considéré comme consécutif de n).

Le cas d'une chaîne ouverte se ramène immédiatement à celui qui vient d'être traité. Il suffit d'ajouter un chaînon tout entier extérieur à la chaîne sauf deux portions de son bord, dont l'une appartiendrait au bord du premier chaînon (et à ce chaînon seulement) et l'autre au bord du $n^{\text{ième}}$ chaînon. On aurait des dispositions analogues avec cette différence qu'il faut considérer les chaînons comme se suivant dans l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1, 2 \ldots$$

au lieu de l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots.$$

III. — Correspondance entre les plans de deux courbes fermées.

7. Soient, dans les plans E et e, deux courbes de Jordan fermées sans point multiple C et c, dont les coordonnées sont des fonctions continues d'un paramètre t variant dans l'intervalle (0, 1). En associant les points de C et c donnés par une même valeur de t, je réalise l'homéomorphie de ces courbes. *Je me propose d'étendre cette correspondance à la totalité des plans* E *et* e. Il suffit, d'après une remarque déjà utilisée, de prendre pour c une courbe particulière. *Je prendrai pour* c *le contour d'un carré* de centre, l'origine, de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de périmètre égal à 1. Le paramètre t d'un point de c sera son abscisse curviligne comptée à partir d'un certain sommet de c.

La méthode que j'emploie est la suivante : J'enferme C dans une suite de chaînes régulières fermées G_0, G_1, G_2, ..., G_n, ... telles que la chaîne G_n soit totalement intérieure à la chaîne G_{n-1}. Les contours polygonaux L_{n-1}, L'_{n-1}, L_n, L'_n qui limitent ces chaînes déterminent deux couronnes A_{n-1}, A'_{n-1} et G_{n-1} est la somme de ces deux couronnes et de G_n. Je décompose chacune de ces couronnes en polygones en nombre égal à celui des chaînons de G_{n-1}. Je fais des constructions analogues pour *c*. J'établis ensuite entre les polygones obtenus la correspondance indiquée au n° **1**. J'établis des correspondances analogues entre les extérieurs de L_0 et l_0 et les intérieurs de L'_0 et l'_0. Moyennant quelques précautions, ces correspondances réalisent la correspondance cherchée entre E et *e*.

Dans l'exposition de cette méthode, j'énoncerai quelques résultats déjà établis par M. de la Vallée Poussin; mais j'emploierai des procédés différant des siens et appropriés au but que je poursuis.

8. Théorème. — *Étant donnés une courbe fermée* C *sans point multiple et un nombre positif* Δ_0, *je puis enfermer* C *dans une chaîne régulière fermée* G_0 *d'au moins cinq chaînons et dont chacun a un diamètre inférieur à* Δ_0.

Partageons l'intervalle (0, 1) de variation de t en 2^k parties égales. Ceci partage C en 2^k tronçons. Soit ε_0 le maximum du diamètre de ces tronçons. Couvrons d'autre part le plan d'un pavage constitué par des carrés égaux de côtés parallèles aux axes et soit η_0 un nombre supérieur au diamètre (diagonale) de ces carrés. A chaque tronçon j'attache un chaînon formé de ceux des carrés du pavage qui touchent ce tronçon. Il s'agit de choisir k et η_0 de façon à satisfaire aux conditions imposées.

Deux chaînons consécutifs se touchent; car ils ont en commun le carré qui contient le point commun aux deux tronçons dont ils proviennent. Pour que deux chaînons non consécutifs ne se touchent pas, il suffira de prendre η_0 inférieur à la moitié de l'écart minimum de deux tronçons non consécutifs. Remarquons qu'alors η_0 est inférieur à la moitié de l'écart des extrémités d'un même tronçon, donc à $\frac{1}{2}\varepsilon_0$. D'autre part, le diamètre d'un chaînon

est au plus égal à celui du tronçon augmenté de $2\eta_0$; il est donc inférieur à $2\varepsilon_0$.

La *chaîne sera régulière si* (n° 5, I) elle n'est pas intérieure à un groupe de quatre chaînons consécutifs. Ce groupe a un diamètre inférieur à $8\varepsilon_0$. Comme C appartient à la chaîne, il suffira que ε_0 soit inférieur au huitième du diamètre de C.

Il suffira donc de prendre $k > 2$ (pour avoir au moins cinq chaînons) *et assez grand pour que* ε_0 *soit inférieur au huitième du diamètre de* C *et à la moitié de* Δ_0. Ceci fait, la courbe est partagée en tronçons et l'on *prendra* η_0 *inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs.* Tout ceci est possible puisque ε_0 tend vers o quand k augmente indéfiniment.

C est intérieure à cette chaîne G_0 et ne touche pas à ses deux bords L_0, L_0'; car tout point de C est intérieur à un carré ou à un groupe de deux ou quatre carrés du pavage.

Si l'on ne fixe pas Δ_0, on pourra déterminer la chaîne par les autres conditions et l'on sera assuré que chaque chaînon a un diamètre $< 2\varepsilon_0$.

9. Supposons que G_{n-1} ait été construite à l'aide d'un certain partage de C en tronçons et d'un certain pavage du plan par des carrés. Pour construire G_n je partage l'intervalle qui donne chaque tronçon du partage précédent en deux parties égales. Soit ε_n le maximum du diamètre des tronçons obtenus. Chaque tronçon ainsi obtenu étant une fraction de l'un des précédents, ε_n *ne peut pas augmenter et tend vers* o *quand n augmente indéfiniment.* Soit η_n un nombre inférieur : 1° à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs; 2° à l'écart de C avec chacun des contours polygonaux L_{n-1}, L_{n-1}' qui limitent G_{n-1}. Je partage chaque carré du pavage qui a donné G_{n-1} en un nombre (le même pour tous) assez grand de carrés égaux pour que ces carrés aient un diamètre inférieur à η_n. Ce partage en tronçons et ce pavage permettent de définir la chaîne G_n. Elle remplira les conditions voulues, car le diamètre du carré du pavage remplit les conditions imposées vis-à-vis de ε_n et comme ε_n n'est pas supérieur à ε_0, il vérifie les mêmes inégalités de condition que ε_0. De plus, la deuxième condition im-

posée à η_n montre que cette chaîne n'a pas de points sur L_{n-1}, ni L'_{n-1}, donc est bien intérieure à G_{n-1}.

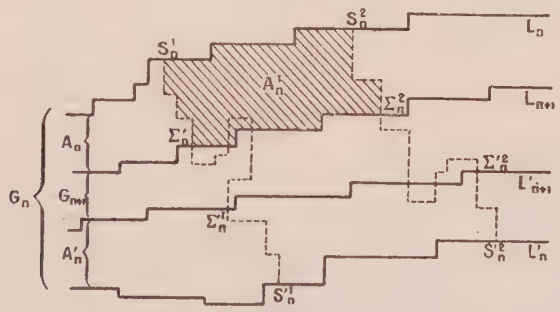
Remarquons enfin que le diamètre maximum Δ_n *des chaînons de* G_n *est inférieur à* $2\varepsilon_n$ et que *chacun des deux chaînons de* G_n, *qui proviennent d'un tronçon ayant servi à la formation de* G_{n-1}, *est une partie du chaînon correspondant de* G_{n-1} en raison de la construction des pavages.

Les chaînes ainsi construites définissent bien les anneaux A_n, A'_n annoncés au n° **7**. A_n est compris entre L_n et L_{n+1} et A'_n entre L'_n et L'_{n+1}.

10. *Décomposition des anneaux* A_n, A'_n *en polygones.* — Dans ce qui suit, j'aurai à considérer des éléments de même nature, en nombre égal à ceux des chaînons de chaque chaîne G_n. Je désignerai tous ces éléments par une même lettre affectée de deux indices : un indice inférieur, celui de la chaîne G_n; un indice supérieur qui sera le numéro d'ordre du chaînon de G_n auquel correspond l'élément.

Proposons-nous de décomposer en polygones les deux anneaux A_n, A'_n déterminés par les deux chaînes G_n, G'_{n+1} et limités respectivement par les contours L_n, L_{n+1} et L'_n, L'_{n+1} (*fig.* 2). Pour cela, divisons la couronne L_n, L'_n en morceaux Γ_{2p+1} et Γ'_{2p} par des lignes S_{2p+1}, S'_{2p+1}, T_{2p+1}, T'_{2p+1}, comme il a été dit au n° **6**. Pour sim-

Fig. 2.



plifier les notations, les morceaux seront notés Γ'_n, Γ^2_n, ..., et les lignes S^1_n, S'^1_n, S^2_n S'_n, ...

Considérons une des lignes SS' ainsi construites. S est extérieur à L_{n+1} et à L'_{n+1}, tandis que S' est intérieur à ces contours. Donc SS'

coupe chacun de ces contours. Parcourons SS′ de S vers S′. *J'appellerai* Σ *le premier point de rencontre avec* L_{n+1} *et* Σ′ *le dernier point de rencontre avec* L'_{n+1}. Les lettres Σ, Σ′ seront naturellement affectées des mêmes indices que les lettres S, S′. Nous ne conserverons de chaque ligne SS′ que les arcs SΣ et S′Σ′. Ces lignes ne se coupent pas. Elles partagent donc les anneaux A_n et A'_n en polygones que je désignerai par la lettre A avec deux indices évidents et un accent s'il s'agit de A'_n. Par exemple, A^1_n aura parmi ses sommets les points S^1_n, S^2_n, Σ^1_n, Σ^2_n.

Ces polygones A et A′ réalisent la décomposition des anneaux A_n, A'_n en polygones : ils se présentent comme des chaînons ne se touchant que par des parties de leurs frontières, la chaîne qu'ils forment n'ayant pas de vides.

11. Faisons une remarque qui nous sera utile plus loin, sur la disposition des polygones A par rapport aux chaînons G. Considérons le polygone A^α_n et étudions son contour. La définition de ce contour dépendant de la parité de α, nous distinguerons deux cas.

1° α *impair.* — Le contour $\Sigma^\alpha_n S^\alpha_n S^{\alpha+1}_n \Sigma^{\alpha+1}_n$ appartient aux contours des trois chaînons $\alpha - 1$, α, $\alpha + 1$ (n° **6**). Il est donc intérieur à l'ensemble de ces trois chaînons. Les points Σ^α_n, $\Sigma^{\alpha+1}_n$ appartiennent au chaînon G^α_n donc ne peuvent appartenir qu'à ces trois mêmes chaînons. Il en résulte que ces points ne peuvent appartenir qu'aux chaînons $2\alpha - 3$, $2\alpha - 2$, ..., $2\alpha + 2$ de G_{n+1}, sans quoi ils appartiendraient à d'autres chaînons de G_n (n° **9**). Donc le contour $\Sigma^\alpha_n \Sigma^{\alpha+1}_n$ ne peut emprunter que les chaînons $2\alpha - 4$, ..., $2\alpha + 3$ de G_{n+1} (n° **6**), et par suite appartient aux chaînons $\alpha - 2$, $\alpha - 1$, α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ de G_n. Tout le contour de A^α_n et par suite tout ce polygone est intérieur au groupe de ces cinq chaînons de G_n.

2° α *pair.* — Rien n'est changé pour la première partie du contour. Σ^α_n appartient au chaînon $\alpha - 1$, donc peut appartenir à l'un des trois chaînons $\alpha - 2$, $\alpha - 1$, α. De même $\Sigma^{\alpha+1}_n$ peut appartenir à l'un des trois chaînons α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ et pas à d'autres. Le même raisonnement montre que tout l'arc $\Sigma^\alpha_n \Sigma^{\alpha+1}_n$ appartient au groupe des sept chaînons $\alpha - 3$, ..., $\alpha + 3$ de G_n.

Donc, dans tous les cas, A_n^α *est intérieur à un groupe de sept chaînons consécutifs de* G_n dont le chaînon moyen est le chaînon G_n^α. Par suite, A_n^α *ne peut toucher qu'à neuf chaînons consécutifs de* G_n, G_n^α étant toujours le chaînon moyen.

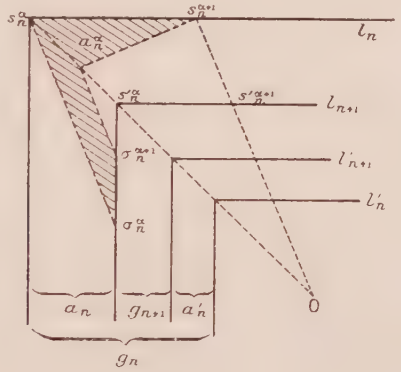
Il en résulte aussi qu'*un chaînon de* G_n *ne peut toucher au plus que neuf polygones consécutifs de* A_n.

Les résultats sont évidemment les mêmes pour A'_n.

12. Passons à la courbe c du plan e: c est le périmètre d'un carré de côtés parallèles aux axes, de centre l'origine o des coordonnées et c a pour longueur 1. Le paramètre t d'un point de c est son abscisse curviligne comptée à partir d'un sommet.

Pour construire une chaîne g_0 contenant c, je considère d'abord

Fig. 3.



deux contours carrés homothétiques à c et concentriques, l'un l_0 extérieur, l'autre l'_0 intérieur. Puis je partage c en 2^k tronçons égaux et je mène les demi-droites allant de o aux extrémités de ces tronçons (les sommets de c sont parmi ces points). Les quadrilatères formés par ces droites et l_0 l'_0 seront les chaînons de la chaîne g_0, leurs sommets seront désignés sur l_0 par s_0^α et sur l'_0 par $s_0'^\alpha$ et le chaînon g_0^α sera le quadrilatère $s_0^\alpha\, s_0^{\alpha+1}\, s_0'^{\alpha+1}\, s_0'^\alpha$.

D'une manière générale, supposons g_{n-1} définie et limitée par deux carrés l_{n-1}, l'_{n-1}. Pour définir g_n je construis deux carrés l_n, l'_n homothétiques à c et concentriques et respectivement équisdistants de l_{n-1} et c et l'_{n-1} et c. Je partage en deux tronçons égaux

chacun des tronçons qui a servi à construire g_{n-1} et je joins o aux extrémités. Ceci me donne les chaînons de g_n dont je désignerai les sommets par la lettre s ou s' affectée de l'indice inférieur n et d'un indice supérieur dont la détermination est immédiate. Le chaînon g_n^α aura pour frontière le contour $s_n^\alpha s_n^{\alpha+1} s_n'^{\alpha+1} s_n'^{\alpha}$.

J'appelle a_n, a_n' les anneaux respectivement compris entre l_n, l_{n+1} et l_n', l_{n+1}'.

Revenons au plan E. Soit Σ_n^α un point Σ sur L_{n+1}. Si ce point est confondu avec un point S_{n+1}, soit S_{n+1}^k, je noterai aussi le point s_{n+1}^k par la lettre σ_n^α. Si Σ_n^α est situé entre deux points consécutifs S_{n+1} d'indices supérieurs k, $k+1$, je marquerai sur l_{n+1}, entre les deux points s_{n+1} d'indices k, $k+1$, un point que j'appellerai σ_n^α. *Remarquons que si les points* S_{n+1}, Σ_n *se présentent sur* L_{n+1} *dans un certain ordre, les points* s_{n+1}, σ_n *se présenteront sur* l_{n+1} *dans le même ordre.*

Or, puisqu'on peut joindre les points S_n, Σ_n dans l'anneau A_n sans que les chemins se coupent, on pourra joindre les points s_n, σ_n dans a_n par des chemins ne se coupant pas, ceci parce que les ordres de succession des points de même indice sont les mêmes dans E et *e*. Comme chemin $s_n^\alpha \sigma_n^\alpha$, je prendrai, quand ce sera possible, *le segment rectiligne* ayant ces points pour extrémités et, dans le cas contraire, *une ligne brisée ayant ses sommets uniquement sur les diagonales de c.* a_n se trouve ainsi décomposé en polygones et j'appelle a_n^α celui de ces polygones qui contient les points s_n^α, σ_n^α, $s_n^{\alpha+1}$, $\sigma_n^{\alpha+1}$.

Je ferai les mêmes constructions sur les anneaux a_n' (*fig.* 3).

Nous avons vu que l'arc $\Sigma_n^\alpha \Sigma_n^{\alpha+1}$ de L_{n+1} ne contient que des points appartenant aux seuls chaînons de $2\alpha - 6$ à $2\alpha + 5$ de G_{n+1}.

Donc cet arc est compris entre les deux points S_{n+1} d'indices supérieurs $2\alpha - 7$, $2\alpha + 6$. L'arc $\sigma_n^\alpha \sigma_n^{\alpha+1}$ de l_{n+1} est donc compris lui aussi entre les points s_n ayant ces indices, c'est-à-dire qu'il est intérieur aux chaînons de g_n, $\alpha - 3, \ldots, \alpha + 3$. Donc :

Un polygone a_n^α *est intérieur à un groupe de sept chaînons consécutifs de* g_n *et en touche au plus neuf*, le chaînon moyen étant g_n^α. *De même un chaînon* g_n^α *touche au plus neuf polygones consécutifs de* a_n.

13. Considérons une ligne polygonale $\Sigma_n^\alpha S_n^\alpha$ et la ligne $\sigma_n^\alpha s_n^\alpha$. Si ces lignes n'ont pas, initialement, le même nombre de sommets, je marque sur l'une d'elles des points qui joueront le rôle de sommets. J'établis ensuite entre ces lignes une correspondance continue, faisant correspondre les sommets, et faisant correspondre les côtés par similitude. Les points S_{n+1}, Σ_n partagent L_{n+1} en tronçons. Je fais de même pour chacun de ces tronçons et pour le tronçon correspondant de l_{n+1}. La correspondance entre les contours de A_n^α et a_n^α est alors celle indiquée au n° **1** et par suite je peux étendre cette correspondance à la totalité de ces polygones comme il a été dit à ce numéro. Il en est de même pour l'intérieur de L_0' et l'intérieur de l_0'.

Pour les extérieurs de L_0 et l_0 je considère deux contours carrés auxiliaire L, l égaux et assez grands pour contenir respectivement à leur intérieur tout L_0 ou tout l_0. Je joins un sommet de L à un sommet de L_0 et un sommet de l au sommet correspondant sur l_0 à l'aide de lignes polygonales ayant le même nombre de sommets. La couronne comprise entre l et l_0 et celle comprise entre L et L_0 se présentent alors comme deux polygones auxquels j'applique les considérations du n° **1**. Enfin, pour les extérieurs de L et l, j'envisage deux axes de coordonnées portés par deux côtés de L et les deux axes portés par les côtés correspondants de l. Je fais correspondre les points qui ont même coordonnée.

La correspondance sur C et c a été définie. Elle lie les points qui ont même paramètre. Elle fait correspondre en particulier les points M_n^α, m_n^α; M_n^α étant le point commun aux deux tronçons qui ont fourni les chaînons $\alpha - 1$, α de G_n et m_n^α étant commun aux deux tronçons qui ont fourni les chaînons $\alpha - 1$, α de g_n. Ces points ont en effet pour paramètre $\frac{\alpha - 1}{2^{k+n}}$.

14. *Je dis que la correspondance ainsi établie donne la solution du problème posé.* Pour le montrer il me faut d'abord prouver qu'elle atteint tout point de E et tout point de e et qu'elle est biunivoque. Il est manifeste que tout point de e est atteint. Cela est manifeste aussi pour tout point de E qui appartient à C ou qui est extérieur

à une chaîne G_n, car un tel point appartient à un des anneaux A, ou est extérieur à L_0, ou intérieur à L'_0. Il suffit donc de prouver que tout point M de E non situé sur C est extérieur à une des chaînes G_n. Ceci résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit Δ_n le maximum du diamètre des chaînons de G_n. Tout point intérieur à G_n a, avec* C, *un écart inférieur à Δ_n.*

Tout point intérieur à G_n appartient soit à un chaînon, soit à un vide intérieur à un groupe de deux chaînons consécutifs (n° **3**, V). Si M appartient à un chaînon, le théorème est vérifié, car ce chaînon contient au moins un point de C, et la distance de ce point à M est inférieure au diamètre du chaînon. Si M appartient à un vide, appelons λ le contour de l'ensemble des deux chaînons qui contiennent ce vide et N le point de C commun aux deux tronçons qui ont donné naissance à ces chaînons. N étant intérieur aux deux chaînons, est intérieur à λ. M étant aussi intérieur à λ une demi-droite issue de M et opposée à MN coupe λ en un point P. P est sur un des deux chaînons et ce chaînon contient aussi N qui appartient aux deux. Donc $NP < \Delta_n$ et par suite $MN < \Delta_n$ puisque M est par construction entre N et P. Le théorème est démontré.

Soit alors M un point de E non sur C. Il a avec C un écart non nul ε. Considérons un nombre n assez grand pour que le maximum ε_n du diamètre des tronçons de C qui fournissent les chaînons de G_n soient inférieurs à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Δ_n est inférieur à $2\varepsilon_n$, donc à ε. M ayant avec C un écart supérieur à Δ_n est extérieur à G_n.

La correspondance s'étend donc bien à la totalité de E et *e*. Elle est biunivoque, car les polygones A (ou *a*) n'ont en commun que des points frontières et que ces frontières se correspondent.

15. *Il reste enfin à prouver que cette correspondance est continue dans les deux sens.* Elle est manifestement continue en tout couple de points homologues M, *m* qui n'appartiennent pas à C et *c*. Il suffit alors de faire la démonstration en supposant M et *m* sur C et *c*.

Un point M de C est intérieur au contour extérieur de l'un au

moins des chaînons de la chaîne G_i; soit par exemple, au chaînon G_i^7. Tous les points de G_i^7 *suffisamment voisins de* M ont leurs homologues définis par la considération de polygones A_{i+p}^k, où p est positif. Chacun de ces A_{i+p}^k contenant des points de G_i^7 contient au plus des points de 7 chaînons consécutifs de la chaîne G_{i+p}, dont l'un au moins provenant de la subdivision de G_i^7; donc ces 7 chaînons sont intérieurs à 7 chaînons consécutifs de G_i, l'un d'eux étant G_i^7. Finalement, tous les A_{i+p}^k considérés appartiennent aux 13 premiers chaînons de G_i^1 à G_i^{13} de la chaîne G_i. Les a_{i+p}^k correspondant font donc partie de la figure formée par les 13 chaînons g_i^1 à g_i^{13} et le diamètre de cette figure tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Ceci prouve la continuité de la correspondance quand on passe de E à *e*. Le passage de *e* à E s'étudiera de même; d'ailleurs, d'après un résultat de M. Jordan, une correspondance biunivoque et continue dans un sens est continue dans les deux sens.

16. En résumé, le problème posé au n° **7** se trouve résolu. Si nous envisageons deux courbes fermées quelconques sans point multiple, étant donnée une correspondance biunivoque et continue entre les points de ces courbes, on peut l'étendre à la totalité de leurs plans au moyen d'une infinité dénombrable de correspondances homographiques. La correspondance entre régions homologues ne contenant pas de points des courbes est obtenue par un nombre fini de telles correspondances.

IV. — Correspondance entre les plans de deux courbes ouvertes.

17. *Étant données deux courbes de Jordan ouvertes* C *et c sans point multiple des plans* E *et e, nous allons étendre à tout* E *et e la correspondance entre* C *et c.*

Pour cela, appelant A, B; *a*, *b* les extrémités de C et *c*, je vais construire un arc C′ sans point multiple joignant A à B et n'ayant que ces points en commun avec C et un arc analogue *c*′. Je ferais

correspondre $C + C'$ avec $c + c'$ en conservant la correspondance donnée de C avec c. La correspondance entre ces courbes fermées s'étend à la totalité de leurs plans et cette extension résout le problème posé pour C et c.

Comme courbe c, je prends le segment (0, 1) de Ox et pour c' je prends le reste $ap_0\, q_0\, b$ du périmètre d'un carré de côté c. La construction de C′ va encore résulter des propriétés des chaînes régulières ouvertes enfermant C. Ce sont ces propriétés que j'étudie maintenant.

18. Théorème. — *Soit* C *un arc de Jordan sans point multiple d'extrémités* A, B. *Je peux enfermer* C *dans une chaîne régulière ouverte* G_0 *d'au moins sept chaînons, et dont chacun a un diamètre inférieur à un nombre* Δ_0 *donné.*

Partageons l'intervalle (0, 1) en 2^k parties égales, ce qui partage C en un même nombre de tronçons. Appelons ε_0 le maximum du diamètre de ces tronçons. Considérons d'autre part un pavage du plan à l'aide de carrés égaux ayant un diamètre inférieur à un certain nombre η_0 que je déterminerai ensuite. Pour constituer le premier chaînon, je prends un arc AA_0 de C somme des α_0 premiers tronçons et je garde ceux des carrés qui touchent cet arc. Ils forment un chaînon que j'appelle (A_0). Je construis de même le chaînon (B_0) à l'aide de l'arc BB_0 somme des β_0 derniers tronçons. Je constitue les chaînons intermédiaires chacun à l'aide d'un des tronçons restants de C.

Les chaînons ainsi construits forment une *chaîne ouverte* si η_0 est inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs. On a alors $\eta_0 < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ (n° **8**).

La chaîne sera *régulière* (n° **4**) si aucun chaînon n'est intérieur à aucun groupe de deux chaînons consécutifs. Pour écarter le cas contraire, je distinguerai deux cas suivant que le groupe en question ne contient pas ou contient un des chaînons extrêmes.

Premier cas. — Supposons que le chaînon de rang $\varkappa$ soit intérieur au groupe des deux chaînons intermédiaires λ, $\lambda + 1$. Sup-

posons pour fixer les idées $\varkappa < \lambda$. Le chaînon $\varkappa - 1$ ne touche aucun des chaînons λ, $\lambda + 1$ qui ne lui sont pas consécutifs. Il a des points à l'intérieur de leur groupe, ceux qu'il a en commun avec $(\varkappa)$. Il est donc tout entier intérieur à ce groupe. Il en est de même des chaînons $\varkappa - 2$, $\varkappa - 3$, ... (A_0). Dans ce cas, l'un des chaînons extrêmes est intérieur à un groupe de deux chaînons intermédiaires consécutifs. Ce cas ne pourra pas se produire si chaque chaînon extrême a un diamètre supérieur au double du maximum du diamètre des chaînons intermédiaires, c'est-à-dire supérieur à $4\varepsilon_0$, puisque chaque chaînon intermédiaire a au plus le diamètre $2\varepsilon_0$ (n° **8**). Pour réaliser cette condition nous prendrons α_0 et β_0 juste assez grands pour que les diamètres des arcs AA_0, BB_0 surpassent $4\varepsilon_0$. On peut alors préciser les limites entre lesquelles sont compris les diamètres de (A_0) et (B_0). Si l'on diminuait α_0 d'une unité, on aurait un tronçon de diamètre au plus égal à $4\varepsilon_0$; donc AA_0 a un diamètre au plus égal à $5\varepsilon_0$ et par suite (A_0) a un diamètre inférieur à $6\varepsilon_0$. Il en est de même pour (B_0).

Deuxième cas. — Le chaînon $(\varkappa)$ est intérieur au groupe formé de (A_0) et de son consécutif [le raisonnement serait le même pour (B_0)]. Le chaînon $(\varkappa + 1)$ serait aussi intérieur à ce groupe et par suite le chaînon (B_0). Or B est intérieur à (B_0), B serait donc intérieur au groupe en question qui contient aussi A. Ce groupe a un diamètre au plus égal à $6\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 = 8\varepsilon_0$. Si l'on appelle D la distance AB, ce cas ne se produira pas si $\varepsilon < \frac{1}{8} D$.

Enfin écrivons qu'il y a au moins sept chaînons [1], c'est-à-dire au moins cinq chaînons intermédiaires. Les arcs AA_0, BB_0 ont chacun un diamètre inférieur à $5\varepsilon_0$. Si donc $D > 10\varepsilon_0$, les arcs AA_0, BB_0 n'empiètent pas et l'arc A_0B_0 a un diamètre supérieur à $D - 10\varepsilon_0$. Il suffit alors que $D - 10\varepsilon_0 > 5\varepsilon_0$ ou $15\varepsilon_0 < D$ pour être assuré que cet arc comprend au moins cinq tronçons. Cette condition est plus restrictive que celle trouvée plus haut.

Si enfin on veut que chaque chaînon ait un diamètre inférieur

---

[1] Ce nombre a été choisi en vue des applications ultérieures. On ferait des raisonnements analogues à partir d'un nombre quelconque.

à Δ_0, il suffira qu'il en soit ainsi pour les chaînons extrêmes, c'est-à-dire que $6\varepsilon_0 < \Delta_0$.

En résumé, on prendra k assez grand pour que ε_0 soit inférieur à $\frac{D}{15}$ et à $\frac{\Delta}{6}$. C étant ainsi partagée en tronçons, on prend η_0 inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs. On choisit enfin α_0, β_0 juste assez grands pour que les arcs AA_0, BB_0 aient un diamètre supérieur à $4\varepsilon_0$.

Si l'on ne fixe pas Δ_0 on supprimera la condition correspondante. On sera assuré que *chaque chaînon aura un diamètre inférieur à* $6\varepsilon_0$.

Soient G_0 la chaîne ainsi construite et L_0 son contour.

19. Enfermons maintenant C dans une suite de chaînes G_0, G_1, ..., G_n, ... Nous imposerons à ces chaînes la condition que les contours L_0, L_1, ..., L_n, ... qui les limitent soient intérieurs chacun aux contours qui les précèdent. Supposons G_{n-1} construite à l'aide d'éléments qui sont : un partage de C en tronçons dont le diamètre maximum est ε_{n-1}; un pavage du plan à l'aide de carrés égaux; deux nombres α_{n-1}, β_{n-1} juste assez grands pour que AA_{n-1} et BB_{n-1} aient un diamètre supérieur à $4\varepsilon_{n-1}$. Pour déterminer G_n, je partage chaque intervalle du paramètre t ayant fourni un tronçon du partage précédent en deux parties égales. Soit ε_n le diamètre maximum des tronçons ainsi obtenus. ε_n est au plus égal à ε_{n-1}. Je partage chaque carré du pavage précédent en un nombre (le même pour tous) de carrés égaux dont j'appelle le diamètre η_n. Je prends ce nombre de carrés assez grand pour que : 1° η_n soit inférieur à la moitié de l'écart minimum des groupes de deux tronçons non consécutifs de C; 2° à l'écart de C avec L_{n-1}. Enfin je choisis α_n, β_n juste assez grands pour que le diamètre de AA_n et de BB_n soit supérieur à $4\varepsilon_n$.

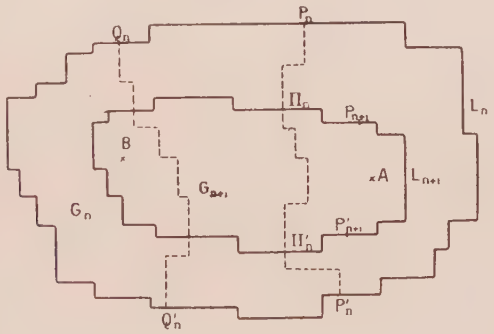
Comme ε_n est au plus égal à ε_{n-1} donc à ε_0, ε_n remplit les conditions exigées pour ε_0 et ces éléments fourniront une chaîne G_n ayant les propriétés de G_0. De plus, la deuxième condition imposée à η_n montre que tout point des chaînons de G_n est intérieur à G_{n-1}, donc que G_n est intérieure à L_{n-1}. Le diamètre des chaînons de G_n

est inférieur à $6\varepsilon_n$, donc tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Faisons encore quelques remarques. L'arc AA_{n-1} a un diamètre supérieur à $4\,\varepsilon_{n-1}$, donc à $4\,\varepsilon_n$. Par suite, A_n *ne peut pas être en dehors de cet arc.* De même B_n est sur l'arc BB_{n-1}. Un chaînon intermédiaire de G_{n-1} provient d'un tronçon de C qui en fournira deux dans la division suivante et qui, par suite, donnera naissance à deux chaînons de G_n. *Ces deux chaînons sont entièrement intérieurs au chaînon considéré de* G_{n-1}. Le tronçon AA_{n-1} fournira le tronçon AA_n et éventuellement d'autres tronçons. Les chaînons qui en résultent pour G_n sont entièrement intérieurs à (A_{n-1}).

20. Construction de C′ (*fig.* 4). — C′ sera obtenue comme image continue de c' $(ap_0\,q_0\,b)$ au moyen des remarques suivantes :

Fig. 4.



Sur le contour L_n de G_n il y a quatre points P_n, P'_n, Q_n, Q'_n tels que les deux arcs $P_n Q_n$, $P'_n Q'_n$ empruntent chacun tous les chaînons, les points P_n, P'_n étant les seuls qui appartiennent au chaînon (A_n) et les points Q_n, Q'_n étant les seuls qui appartiennent à (B_n) (n° **6**). L'un des arcs $P_n P'_n$ du contour de (A_n) est alors tout entier intérieur à G_n. Cet arc et la portion P_n, P'_n du contour de G_n forment un contour Σ qui enferme tout (A_n), donc A. Mais B est extérieur à Σ. Par suite, L_{n+1} qui emprunte des points de (A_{n+1}) intérieur à (A_n), donc à Σ, et des points de (B_{n+1}) extérieur à A, coupe Σ. Il ne coupe pas la partie appartenant à L_n, donc il coupe l'arc $P_n P'_n$. Soit Π_n le premier point de rencontre avec L_{n+1} à

partir de P_n. Je formerai un arc $P_n P_{n+1}$ en ajoutant à $P_n \Pi_n$ celui des deux arcs $\Pi_n P_{n+1}$ de L_{n+1} qui n'emprunte pas de points au chaînon (B_{n+1}).

Remarquons dès maintenant que Π_n appartenant au chaînon (A_n) ne peut pas appartenir aux chaînons de rang supérieur à 2 de C_n. Soit $2\lambda + 1$ le nombre des chaînons de G_{n+1} qui sont entièrement intérieurs au groupe des deux premiers chaînons de G_n (n° **19**). Π_n ne peut alors appartenir qu'à ces chaînons de rang au plus égal à $2\lambda + 1$. *Le chemin* $\Pi_n P_{n+1}$ emprunte donc des parties appartenant uniquement aux $2\lambda + 2$ premiers chaînons de G_{n+1} et par suite *est intérieur au groupe des trois premiers chaînons de* G_n (n^{os} **6** et **19**).

Ceci étant, je marque sur le côté ap_0 de c' les points $p_1, p_2 \ldots$, $p_n, \ldots$ définis par $ap_n = \frac{ap_0}{2^n}$. Je fais correspondre les points P et p de même indice. Je fais de même correspondre le segment $p_n p_{n+1}$ à la ligne polygonale $P_n \Pi_n P_{n+1}$ par exemple par similitude des segments homologues. Je fais des constructions et j'établis des correspondances analogues pour les éléments désignés par la lettre Q. Je fais encore correspondre le côté $p_0 q_0$ à l'arc $P_0 Q_0$ de L_0 et enfin je fais correspondre A à a et B à b. Je vais montrer que l'*ensemble des points ainsi construits et correspondant aux points de* c' *constitue l'arc* C′ *cherché*. Il faut montrer pour cela :

1° C′ *n'a que les points* A *et* B *sur* C. — Ceci résulte de ce que l'arc $P_n P_{n+1}$ de C′ est, quel que soit n, extérieur à G_{n+1}, donc ne coupe pas C.

2° C′ *n'a pas de point multiple.* — Par leur construction même, les arcs $P_n P_{n+1}$ et $P_m P_{m+1}$ ne se coupent pas. De même pour $Q_n Q_{n+1}$ et $Q_m Q_{m+1}$. Il suffit donc de prouver que $P_n P_{n+1}$ ne coupe pas $Q_m Q_{m+1}$. Or $P_n P_{n+1}$ est intérieur au groupe des trois premiers chaînons de G_n, donc au groupe des trois premiers de G_0. De même $Q_m Q_{m+1}$ est intérieur au groupe des trois derniers chaînons de G_0. Comme G_0 a au moins sept chaînons, ces arcs ne se coupent pas.

3° *Les coordonnées d'un point* M *de* C′ *sont fonctions continues du paramètre qui fixe la position du point m correspondant sur* c'.

— Ceci est manifeste si m n'est ni en a ni en b. Il suffit donc de prouver qu'étant donné H on peut trouver h tel que $am < h$ entraîne $AM < H$. Pour cela remarquons que $P_n P_{n+1}$ étant intérieur au groupe des trois premiers chaînons de G_n, il en est de même pour tout l'arc AP_n. Ce groupe a un diamètre inférieur à $10\,\varepsilon_n$. Prenons n assez grand pour que $10\,\varepsilon_n < H$. Il suffira alors de prendre $h < ap_n$ pour réaliser les conditions imposées.

C′ étant ainsi construite, la proposition énoncée au n° **17** se trouve établie.

V. — Généralisations et applications.

21. Des faits que nous venons d'établir résulte immédiatement la propriété suivante : *si une circonférence (ou un segment de droite) possède dans son plan e une certaine propriété qui se conserve quand on fait une représentation biunivoque et continue du plan e sur un autre plan, cette propriété est aussi vérifiée dans son plan par une courbe de Jordan* C *fermée (ou ouverte) sans point multiple.*

On en déduit, en particulier, le *théorème de M. Jordan :*

Une courbe de Jordan fermée sans point multiple partage son plan en deux régions, une région intérieure bornée et une région extérieure non bornée. Deux points d'une même région peuvent être joints par une ligne continue ne coupant pas la courbe; deux points, pris chacun dans une région différente, ne peuvent pas être joints par une telle ligne. La courbe est frontière de chacune des régions. Ces propriétés sont en effet vraies pour une circonférence et se conservent dans la représentation indiquée.

De même, un arc de Jordan sans point multiple ne partage pas son plan en régions : deux points quelconques non situés sur l'arc peuvent être joints par une ligne continue ne le coupant pas.

Une *courbe de Jordan (fermée ou non) sans point multiple ne remplit aucun domaine.* Supposons, en effet, que la courbe C remplisse un domaine et soit M un point intérieur à ce domaine. Il existe une circonférence de centre M et de rayon H dont l'intérieur appartient à C. Faisons une représentation du plan de C sur le plan d'une circonférence ou d'un segment de droite et soit m l'homo-

logue de M. Il existe un nombre h tel que $mp < h$ entraîne $MP < H$. Tout l'intérieur de la circonférence de centre m et de rayon h appartiendrait donc à c, ce qui n'est pas.

Enfin, *tout point* M *d'une courbe* C *sans point multiple est accessible*, c'est-à-dire qu'il existe une ligne polygonale dont les sommets ont M pour seul point limite et qui ne touche C qu'en M. Faisons la même représentation et menons par m un segment de droite n'ayant que ce point en commun avec c. L'homologue de ce segment sera la ligne cherchée. Tout segment de cette ligne qui ne contient pas m se transforme en effet en une ligne polygonale ayant un nombre fini de sommets, puisque dans toute région ne contenant pas de points des courbes la correspondance se décompose en un nombre fini de correspondances homographiques.

22. Voici une généralisation à plusieurs courbes. Elle résulte de la remarque suivante :

Étant donné dans un plan un nombre fini de courbes sans point multiple et sans point commun, on peut enfermer chacune dans un ou deux contours polygonaux, suivant qu'elle est ouverte ou fermée, de façon que si une courbe C_1 *est intérieure à une courbe* C_2, *les polygones qui enferment* C_1 *soient intérieurs à ceux qui enferment* C_2. Je dirai que *ces polygones ont même disposition que les courbes.*

Soit ε un nombre inférieur à l'écart des courbes. Il suffit d'enfermer chaque courbe dans une chaîne régulière ouverte ou fermée, suivant sa nature, et dont chaque chaînon ait un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Tout point intérieur à une des chaînes a, avec la courbe correspondante, un écart inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$ [1]. La propriété en résulte de suite.

Soient, dans un plan E, *un nombre fini de courbes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sans point multiple et sans point commun* (fermées ou non). *Soient, dans un plan e, un même nombre de courbes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *de même*

[1] Ceci a été démontré pour une courbe fermée (n° **14**). La démonstration serait la même pour une courbe ouverte.

nature. Je suppose que les courbes C_i, c_i *sont toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées. Je suppose de plus que ces courbes ont la même disposition, c'est-à-dire, par exemple, que si* C_1 *est intérieure à* C_2, c_1 *sera intérieure à* c_2. *Je dis que je peux établir entre* E *et e une correspondance qui fasse correspondre les courbes de même indice.*

Je peux me borner au cas où les courbes c sont des carrés ou des segments de droite. Enfermons les courbes C et les courbes c dans les contours polygonaux indiqués au début de ce numéro.

Considérons d'abord une courbe fermée C enfermée dans une chaîne G_0 limitée par deux contours L_0, L'_0 et la courbe correspondante c enfermée de même dans une chaîne g_0 limitée par l_0, l'_0. Je supposerai, quitte à changer t en $1-t$ pour c, que si l'on décrit L_0 en rencontrant successivement les chaînons (1), (2), ..., (n) et si l'on décrit l_0 de la même façon, les sens de rotation sont les mêmes pour les deux plans E et e. J'établis alors entre G_0 et g_0 la correspondance du n° **13**.

Supposons maintenant C et c ouvertes. Soient L et l les contours qui les enferment. Je ferme C par un arc C′ intérieur à L et c par un contour c' que je peux aussi supposer être un carré, à condition de prendre c assez petit. Je suis ramené au cas précédent, les polygones L et l jouant le rôle des contours L et l du n° **13**. Pour avoir comme tout à l'heure le même sens de description sur L et l, il ne sera pas nécessaire de changer de paramètre pour c, il suffira, si c'est nécessaire, de remplacer c' par son symétrique par rapport à la droite c.

Les portions du plan qui restent sont alors des domaines polygonaux deux à deux de même connexité et limités par des contours se correspondant avec des sens de description concordants. Par l'adjonction de lignes convenablement choisies comme il a été fait au n° **13**, je les ramène à des polygones auxquels j'applique la correspondance du n° **1**, ce qui établit la proposition.

En particulier, si *les courbes* C *et c sont toutes ouvertes, on pourra ainsi étendre à la totalité des deux plans toute correspondance entre ces courbes,* puisque, dans ce cas, nous n'avons pas été obligé de changer de paramètre. Il pourra ne plus en être de même si certaines des courbes sont fermées et l'on ne pourra étendre que cer-

taines correspondances, mais il en existe toujours de cette sorte.

Si les courbes n'ont pas même disposition, l'extension est encore possible à un voisinage (l'intérieur des chaînes construites par exemple), *mais ne peut pas s'étendre à la totalité des plans.* Supposons par exemple C_2 intérieure à C_1 et c_2 extérieure à c_1 et admettons que la correspondance entre ces courbes s'étende à la totalité des plans E et e. Soient M et m deux points homologues sur C_2 et c_2. Soient P, p deux points homologues quelconques. La distance $mp = h(P)$ est fonction continue des coordonnées de P. Définissons cette fonction pour toutes les positions de P intérieures à C_1 ou sur C_1. Ce domaine étant borné et fermé, $h(P)$ a un maximum h fini. Si $mp > h$, P sera extérieur à C_1. Or dans la région non bornée qui contient c_2, il y a des points p qui peuvent être joints à m par un chemin ne coupant pas c_1 et tels que $mp > h$. Le point P homologue serait donc extérieur à C_1. Ceci est impossible puisque l'homologue du chemin mp joindrait M et P sans couper C_1.

23. Je me borne à énoncer la généralisation suivante dont la démonstration est immédiate.

Soit dans E *une infinité dénombrable* de courbes sans point commun $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, et dans e une infinité dénombrable de courbes $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Supposons que C_n soit extérieure à une circonférence de centre O et de rayon R_n et c_n extérieure à une circonférence de centre o et de rayon r_n. Supposons que R_n et r_n croissent indéfiniment avec n. On pourra étendre la correspondance entre les courbes C et c dans les cas suivants :

1° Les courbes C et c sont toutes ouvertes;

2° Les courbes C et c sont toutes fermées et extérieures les unes aux autres;

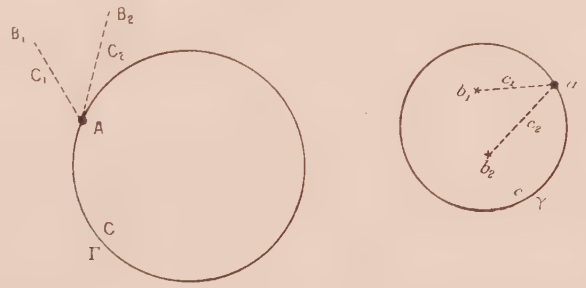
3° Les courbes C et c sont fermées. C_n est intérieure à C_{n+1} et c_n est intérieure à c_{n+1} quel que soit n.

24. Si C et c sont deux courbes de Jordan ayant des points multiples et homéomorphes, leur correspondance peut, selon les cas, s'étendre à tout le plan, s'étendre seulement à leurs voisinages,

ou même ne peut s'étendre à aucun voisinage. Voici deux exemples de ces derniers cas.

Premier exemple. — C est constitué par une circonférence Γ et par deux segments de droite $C_1 C_2$ (AB_1 et AB_2) ayant une extrémité commune A sur Γ et extérieurs à Γ. c est constitué de même, mais les deux segments c_1, c_2 sont intérieurs à γ (*fig.* 5). C et c sont

Fig. 5.

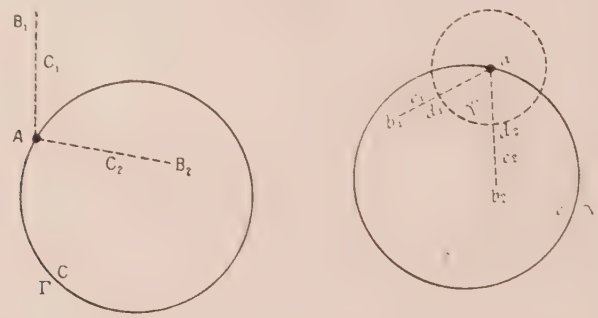


homéomorphes et il existe une correspondance entre ces arcs qui s'étend à leurs voisinages. Je dis qu'il n'existe pas de correspondance entre C et c s'étendant à tout le plan. Une telle correspondance doit d'abord faire correspondre les seuls points multiples A et a et aussi les points frontières, B_1 avec b_1 par exemple et B_2 avec b_2. Elle fera donc correspondre Γ et γ, C_1 et c_1, C_2 et c_2. Soit Γ′ une portion de C_1 ne contenant pas A, donc extérieure à L. Il lui correspond une portion γ′ de c_1, donc intérieure à γ. Par suite γ et Γ′ n'ont pas même disposition que γ et γ′. On ne peut donc pas étendre leur correspondance à tout le plan (n° **22**). On ne peut donc pas étendre à tout le plan la correspondance entre C et c.

Deuxième exemple. — Les courbes C et c sont constituées de la même manière, sauf que C_2 est intérieure à Γ (*fig.* 6). Une correspondance entre C et c ne peut s'étendre à aucun voisinage. Supposons qu'il existe une correspondance entre C et c pouvant s'étendre à leurs voisinages. Elle fera correspondre, comme tout à l'heure, Γ et γ, C_1 et c_1, C_2 et c_2, A et a, B_1 et b_1, B_2 et b_2. Il existe une circonférence γ_1 de centre a, coupant c_1 et c_2 en des points d_1 et d_2 et appartenant au voisinage de c auquel peut s'étendre la

correspondance. Soit γ' l'arc $d_1 d_2$ de γ_1 qui ne coupe pas γ. Il doit lui correspondre un arc Γ' ne coupant pas Γ et joignant un point D_1

Fig. 6.



de C_1 à un point D_2 de C_2. Mais ceci est impossible puisque C_1 est extérieur et C_2 intérieur à Γ.

23. Comme application de la propriété du n° **22** nous donnerons les propriétés suivantes, qui nous serviront souvent :

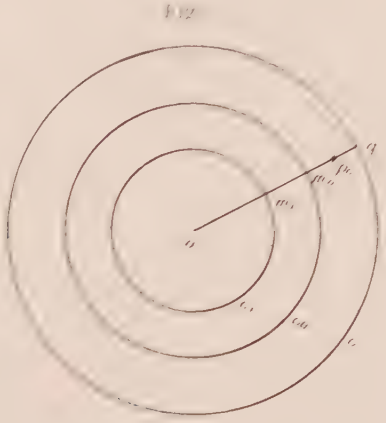
Théorème. — *Soient, dans un plan* E, *deux courbes fermées sans point multiple* C_0, C_1 *intérieures à une même courbe fermée sans point multiple* C *et ne la touchant pas. On peut passer de* C_0 *à* C_1 *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant que l'intérieur de* C.

Par déformation homéomorphe d'un espace ou d'une variété V, il faut entendre les déformations continues de V au cours desquelles des points distincts de V restent distincts.

Supposons d'abord que C_0 et C_1 ne se touchent pas et que C_1 est intérieure à C_0. Nous pouvons alors faire une représentation de E sur un plan e de façon que les trois courbes C, C_0, C_1 soient représentées par trois circonférences c, c_0, c_1, ayant même centre o; c_1 étant intérieure à c_0 et c_0 intérieure à c (n° **22**) (*fig.* 7). Il suffit alors de prouver la possibilité de la déformation indiquée pour les courbes du plan e. Nous allons définir cette déformation.

Nous indiquerons les divers stades de la déformation par les différentes valeurs d'un paramètre θ variant de 0 à 1, la valeur 0 correspondant au stade initial et la valeur 1 au stade final.

Soient m_0 un point de c_0 et m_1 le point où la demi-droite om_0 coupe c_1. Pour le stade θ nous prendrons pour transformé de m_0 le point m du segment $m_0 m_1$ tel que $\frac{mm_0}{m_0 m_1} = \theta$. Soit p_0 un point quelconque de l'intérieur de c. La demi-droite op_0 coupe c_0 en un point m_0, c_1



en un point m_1 et c en un point q. Si p_0 est entre q et m_0, je prendrai pour position de p_0 au stade θ le point p de oq tel que $\frac{pq}{p_0 q} = \frac{mq}{m_0 q}$, m étant le point défini précédemment. Si p_0 est entre o et m_0, je prendrai p tel que $\frac{po}{p_0 o} = \frac{mo}{m_0 o}$. Quand on fait varier θ de o à 1, l'intérieur de c se déforme et cette déformation réalise manifestement les conditions imposées.

Si C_1 n'est pas intérieur à C_0, nous nous ramènerons à ce cas en passant par l'intermédiaire d'une courbe C′ (dont nous allons prouver l'existence), intérieure à C et ayant C_0 et C_1 à son intérieur. On déformera d'abord l'intérieur de C de façon à amener C_0 sur C′, puis de façon à amener C′ sur C_1. Pour prouver l'existence de C′, faisons une représentation de E sur un plan e de façon que C soit représentée par une circonférence c. C_0 et C_1 sont alors représentées par deux courbes c_0, c_1 ne touchant pas c. Ces courbes ont un écart non nul avec c; donc on peut construire une circonférence c' concentrique à c. intérieure à c et ayant c_0 et c_1 à son intérieur. L'image de c' est la courbe C′ cherchée. Le théorème est démontré.

26. *La même propriété a lieu si les courbes* C_0, C_1 *sont ouvertes.* Si C_0 et C_1 ne se coupent pas, nous ferons la représentation de E sur un plan e de façon que C soit représentée par une circonférence c, C_0, C_1 par deux arcs de circonférences c_0, c_1 ayant même centre que c et homothétiques par rapport à ce centre. Si nous complétons les circonférences c_0, c_1 et que nous fassions la déformation du plan e indiquée au numéro précédent, elle réalisera les conditions exigées.

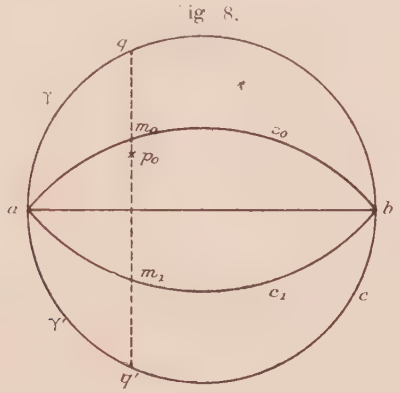
Si C_0 et C_1 se coupent, nous passerons par l'intermédiaire d'un arc C' intérieur à C et ne coupant ni C_0 ni C_1. Un tel arc existe, puisque ni C_0 ni C_1, ni par suite leur ensemble, ne peuvent remplir l'intérieur de C.

27. *Soient dans un plan* E *une courbe fermée sans point multiple* C *et deux courbes ouvertes sans point multiple* C_0, C_1 *intérieures à* C, *sauf leurs extrémités* A, B *qui leur sont communes et qui appartiennent à* C. *On peut passer de* C_0 *à* C_1 *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant que l'intérieur de* C.

Désignons par Γ, Γ' les deux arcs de C déterminés par A et B. Supposons d'abord que C_0 et C_1 n'ont en commun que leurs extrémités A et B. L'intérieur de C est divisé en trois régions ayant respectivement pour frontières les courbes $\Gamma + C_0$, $C_0 + C_1$, $C_1 + \Gamma'$. Considérons dans un plan e une circonférence c sur laquelle nous marquons deux points diamétralement opposés ab. Joignons ces points à l'intérieur de c par deux arcs de cercle c_0, c_1. Appelons γ, γ' les deux arcs de c déterminés par a et b (*fig.* 8). L'intérieur de c est partagé en trois régions ayant pour frontières respectives $\gamma_0 + c_0$, $c_0 + c_1$, $c_1 + \gamma'$. Faisons une représentation de E sur e faisant correspondre $\Gamma_0 + C_0$ à $\gamma + c_0$, A et a, B et b et conservons de cette représentation ce qui concerne les intérieurs de ces courbes. Faisons de même pour les courbes $C_0 + C_1$, $c_0 + c_1$, en ayant soin que la correspondance entre C_0 et c_0 soit la même que celle obtenue dans la correspondance précédente. Enfin opérons de même pour $C_1 + \Gamma'$ et $c_1 + \gamma'$ avec la même précaution pour C_1 c_1. Il ne nous reste plus qu'à déformer l'intérieur de c de façon à amener c_0 sur c_1.

Il en résultera la déformation cherchée. La déformation de l'intérieur de c s'obtiendra par un procédé analogue à celui du n° **25**. Il suffira de faire décrire à chaque point une portion de la perpendiculaire au diamètre ab et d'écrire les mêmes égalités où les

Fig. 8.



points o et q auraient été remplacés par les deux points de rencontre de cette perpendiculaire avec c.

Si C_0, C_1 se coupent, il me suffira de passer par l'intermédiaire d'un arc C′ d'extrémités A, B, intérieur à C et ne touchant C_0, C_1 qu'en A et B. Prouvons l'existence d'un tel arc.

Pour cela, faisons une représentation de E sur un plan e de façon que C soit représentée par une circonférence c. C_0 C_1 sont alors représentées par deux arcs de Jordan c_0, c_1 aboutissant aux deux points a, b homologues de A, B. Partageons l'un des arcs ab de c en deux parties égales par un point m_0. Partageons l'arc am_0 en deux parties égales par un point m_0. L'arc $m_0\,m_1$ a un écart non nul avec c_0 et c_1. On peut donc construire un arc $p_0\,q_1$ concentrique à $m_0\,m_1$ et homothétique et ne rencontrant ni c_0 ni c_1. Il en sera de même des portions de rayons $m_0\,p_0$ et $m_1\,q_1$. D'une façon générale, je partagerai l'arc am_{n-1} en deux parties égales par un point m_n et j'en déduis un arc homothétique et concentrique à $m_{n-1}\,m_n$, soit $p_{n-1}\,q_n$, qui ne coupe pas c_0 et c_1. Je fais les mêmes constructions pour l'arc bm_0. La courbe c', somme des arcs $p_{n-1}\,q_n$ et des segments rectilignes p_n, q_n, réalise les conditions exigées. Le théorème est démontré.

Remarquons que comme courbe auxiliaire C′ nous pouvons prendre une ligne polygonale dont l'ensemble des sommets a pour seuls points limites les points A et B. Il suffit qu'il en soit de même pour c'. La correspondance entre E et e se décompose en effet en un nombre fini de correspondances homographiques pour toute région qui ne contient pas de points de C ou c (n° **16**). Or, on peut manifestement prendre pour c' une telle ligne; il suffit de remplacer les arcs p_{n-1}, q_n par des lignes polygonales voisines.

CHAPITRE II.

LES COURBES DE JORDAN DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

I. — Remarques sur les variétés enlacées et les surfaces simplement connexes.

28. J'aurai à utiliser, dans ce Chapitre et dans le Chapitre III de la deuxième Partie, certaines propriétés des courbes enlacées relativement aux surfaces simplement connexes. Ces propriétés se généralisent à un espace quelconque; je vais les établir dans toute leur généralité. Je rappellerai d'abord les définitions et les propriétés des variétés enlacées, données par M. Lebesgue (1) et par M. Brouwer (2).

La notion de *variétés enlacées* a été introduite par M. Lebesgue, qui l'a utilisée pour démontrer qu'une variété fermée à $n-1$ dimensions partage en régions l'espace à n dimensions. En voici la définition : Soient dans l'espace à $p+q+1$ dimensions deux variétés fermées T_p, T_q à p et q dimensions. Ces variétés sont *enlacées* si, t_p et t_q étant deux variétés polygonales très voisines de T_p et de T_q et leur correspondant, au cours de la déformation continue réduisant t_p, par exemple, à un point non situé sur t_q, il y a un nombre impair de traversées de t_q par t_p.

---

(1) H. Lebesgue, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 27 mars 1911.

(2) Brouwer, *On looping coefficients* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 25 juin 1912, pages 113-121).

M. Brouwer a repris cette définition et a défini en même temps un nombre entier dit *coefficient d'enlacement* des deux variétés. Sa valeur absolue ne dépend que des variétés. Le signe dépend de la définition du sens positif sur chaque variété (1) et de l'ordre dans lequel on les considère. Les variétés enlacées, d'après la définition de M. Lebesgue, ont un coefficient d'enlacement impair.

29. Soient V_h, V_{n-h-1} deux variétés fermées à h et $n-h-1$ dimensions dans l'espace E_n à n dimensions. M. Brouwer démontre sur leur coefficient d'enlacement les propriétés suivantes que nous pouvons prendre pour définition de ce coefficient.

Le coefficient d'enlacement ne change pas si l'on déforme de façon continue l'une d'elles sans toucher l'autre. Il ne change pas non plus si l'on remplace chaque variété par une variété polygonale lui correspondant et très voisine. On peut préciser les mots *très voisines* en disant que les points homologues ont une distance inférieure à la moitié de l'écart des deux variétés.

Pour le calcul du coefficient d'enlacement, il nous suffira donc de considérer deux variétés polygonales φ_h, φ_{n-h-1}. Construisons une calotte φ_{n-h} de variété polygonale à $n-h$ dimensions ayant pour frontière φ_{n-h-1}. Choisissons φ_{n-h} de façon que (ce qui est toujours possible) φ_h et φ_{n-h} n'aient qu'un nombre fini de points communs. φ_h et φ_{n-h} étant décomposées en tétraédroïdes, nous supposerons en outre que ces points n'appartiennent pas à leurs frontières. Soit m un point commun intérieur aux deux tétraédroïdes t_h et t_{n-h}. φ_h et φ_{n-h-1} (et par suite φ_{n-h}) étant orientées, ces tétraédroïdes le sont. Il en résulte un ordre pour leurs sommets. Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_h$ et $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_h$ ces ordres. Menons par O les vecteurs OA_1, OA_2, $\ldots$, OA_h, OB_1, OB_2, $\ldots$, OB_{n-h} équipollents à a_0a_1, a_0a_2, $\ldots$, b_0b_1, $\ldots$, b_0b_{n-h}. Si le tétraédroïde à n dimensions de sommets OA_1, A_2, $\ldots$, A_h, B_1, B_2, $\ldots$, B_{n-h} dont les sommets sont pris dans cet ordre, oriente l'espace comme les

(1) Les variétés dont il sera question sont toujours bilatères. C'est à cette seule condition qu'on peut définir sur elles un sens positif.

axes de coordonnées, nous dirons que φ_h traverse positivement φ_{n-h} en m et nous représenterons cette traversée par le nombre $+1$. Si les orientations sont inverses, nous aurons une traversée négative représentée par -1. Le coefficient d'enlacement est la somme algébrique de ces nombres pour tous les points tels que m.

Envisageons une déformation continue de φ_h réduisant φ_h à un point non situé sur φ_{n-h-1}. On définit de même un nombre affecté à chaque point de traversée de φ_{n-h-1} par φ_h au cours de la déformation. Sa définition fait intervenir les tétraédroïdes qui se touchent et le vecteur représentant le déplacement du point commun. On démontre encore que le coefficient d'enlacement est la somme algébrique de ces nombres. Ceci n'est pas autre chose que la définition de M. Lebesgue.

Si l'on peut réduire l'une des variétés à zéro en coupant l'autre un nombre fini de fois, ou si une calotte limitée par l'une coupe l'autre en un nombre fini de points, il ne sera pas nécessaire de faire appel à des variétés polygonales : ces points, en nombre fini, permettront de calculer le coefficient d'enlacement. En particulier, si l'on peut réduire l'une des variétés à un point non situé sur l'autre sans couper celle-ci, les deux variétés ne sont pas enlacées.

30. Surfaces simplement connexes de l'espace a n dimensions. — On appelle *ainsi* une variété fermée homéomorphe à une hypersphère à $n-1$ dimensions. Elle peut donc être regardée comme constituée de deux éléments de surface et est homéomorphe à la frontière d'un tétraédroïde à n dimensions. On appelle *calotte simplement connexe* dans le même espace une variété non fermée à $n-1$ dimensions constituée par un seul élément. Elle est homéomorphe à un tétraédroïde à $n-1$ dimensions, ou encore à une demi-hypersphère à $n-1$ dimensions, ou encore à une hypersphère à $n-2$ dimensions de l'espace à $n-1$ dimensions et à son intérieur.

Soit S une surface simplement connexe de l'espace E_n. Étant homéomorphe à une hypersphère Σ à $n-1$ dimensions de cet

espace, je peux supposer établie une correspondance biunivoque et continue entre S et Σ. Pour étudier les propriétés de S, il sera commode de définir les *tétraédroïdes sphériques* de Σ.

Soient α, β deux points de Σ non en ligne droite avec le centre O. Les points O, α, β déterminent un plan à deux dimensions qui coupe Σ suivant une hypersphère Σ_1 à une dimension (circonférence). α, β partagent Σ_1 en deux parties. J'appelle le tétraédroïde sphérique à une dimension de sommets α, β, l'arc de Σ_1 limité par ces points et inférieur à la moitié de Σ_1.

Supposons définis les tétraédroïdes sphériques jusqu'à la dimension $h-1$. Soient α, β, ..., λ, $h+1$ points de Σ non dans un même plan à h dimensions avec O. Ces points et le point O définissent un plan à $h+1$ dimensions qui coupe Σ suivant une hypersphère Σ_h à h dimensions. Les $h+1$ points α, β, ..., λ peuvent former $h+1$ groupes de h points, chaque groupe définissant un tétraédroïde sphérique à $h-1$ dimensions. Ces $h+1$ tétraédroïdes forment une variété fermée sans point multiple à $h-1$ dimensions qui partage Σ_h en deux régions. J'appelle *tétraédroïde sphérique à h dimensions de sommets* α, β, ..., λ celle des régions de Σ_h inférieure à la moitié de Σ_h. Ces définitions sont valables jusque $h=n-1$.

J'en déduis la définition de l'*élément à h dimensions* de S ayant pour sommets $h+1$ points A, B, ..., L. J'appelle ainsi le correspondant sur S du tétraédroïde sphérique à h dimensions de Σ qui a pour sommets les points α, β, ..., λ homologues de A, B, ..., L.

31. Théorème. — *Étant donné un nombre* Δ_1, *il existe un nombre* ε_1 *tel que tout élément à h dimensions d'une surface simplement convexe* S, *dont les sommets ont des écarts mutuels inférieurs à* ε_1, *soit intérieur à une hypersphère à* $n-1$ *dimensions de rayon* Δ_1.

Les fonctions qui définissent la correspondance de S et Σ sont continues et définies sur des ensembles fermés, donc uniformément continues. Par suite, à Δ_1 je peux faire correspondre η tel que $\alpha\beta < \eta$ entraîne $AB < \Delta_1$. De même, à η je peux faire correspondre ε_1 tel que $CD < \varepsilon_1$ entraîne $\gamma\delta < \varepsilon$. Ce nombre ε_1 est le nombre cherché.

Si en effet A, B, ..., L ont des distances mutuelles inférieures à ε_1, α, β, ..., λ ont des distances mutuelles inférieures *à* η. On voit alors facilement que tout point m du tétraédroïde sphérique α, β, ..., λ est à une distance de α inférieure à η, donc tout point M de l'élément A, B, ..., L est à une distance de A inférieure à Δ_1.

Le nombre ε_1 est manifestement inférieur à Δ_1; il est valable quel que soit le nombre des points A, B, ..., L jusqu'à la valeur n de ce nombre.

THÉORÈME. — *Étant donné le nombre* Δ, *il existe un nombre* ε_2 *tel que* a, b, ..., l *étant* $h+1$ *points ayant des distances mutuelles inférieures à* ε_2 *et chacun ayant avec* S *un écart inférieur à* ε_2, *on peut amener le tétraédroïde* t_h, *ayant ces points pour sommets, sur un élément* T_h *de* S *par une déformation continue au cours de laquelle chaque point de* t_h *conserve avec* S *un écart inférieur à* Δ.

Prenons le nombre ε_1 correspondant par le théorème précédent à $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}\varepsilon_1$. Ce nombre satisfait aux conditions imposées. Soient, en effet, A, B, ..., L des points de S tels que Aa, Bb, ..., Ll soient inférieurs à ε_2. Il en résulte que les points A, B, ..., L ont des écarts mutuels inférieurs à ε_1 et par suite que tout l'élément T_h ayant pour sommets ces points est intérieur à une sphère de centre A et de rayon Δ_1, donc de diamètre Δ. On a aussi Aa, Ab, ..., A$l < \varepsilon_1$, donc t_h est intérieur à cette sphère. Donc tout le tétraédroïde t_h est intérieur à cette sphère. Considérons le tétraédroïde sphérique τ_h ayant pour sommets les points α, β, ..., λ homologues de A, B, ..., L. τ_h et t_h sont homéomorphes, donc aussi t_h et T_h. Réalisons la correspondance entre t_h et T_h et faisons décrire à un point m de t_h le segment de droite qui le joint à son homologue M de T_h. Faisons de même pour tous les points tels que m en supposant qu'à un même instant, les segments tels que mM seront partagés par la position prise par m dans un même rapport. Nous amenons ainsi t_h sur T_h. Mais le segment Mm est intérieur à la sphère envisagée plus haut. Donc M$m < \Delta$ et m garde au cours de la déformation un écart inférieur à Δ avec M donc avec S.

Remarquons que la déformation continue que nous envisageons ici pour t_h ne laisse pas t_h constamment homéomorphe à lui-même, car il se présentera en général des points multiples au cours de cette déformation. Il n'en était pas de même pour les déformations envisagées aux nos **25**, **26** et **27**.

THÉORÈME. — *Le nombre* ε_2 *du théorème précédent est tel que toute variété polygonale* φ_h *à* h *dimensions* ($h \leqq n-2$) *dont chaque point a avec* S *un écart inférieur à* ε_2 *peut se réduire à zéro, chaque point de* φ_h *gardant, au cours de cette déformation, un écart inférieur à* Δ, *avec* S.

Décomposons φ_h en tétraédroïdes tels que pour chacun d'eux les sommets aient des distances mutuelles inférieures à ε_2. A chaque sommet a nous faisons correspondre un point A de S tel que $Aa < \varepsilon_2$. Faisons correspondre chaque tétraédroïde de φ_h à un élément de S avec la condition suivante : Une face à $h-1$ dimensions commune à deux tétraédroïdes aura pour homologue un élément à $h-1$ dimensions de S, la correspondance étant la même quel que soit celui des deux tétraédroïdes de φ_h auquel on fait appartenir cette face. Cette correspondance est rendue possible par l'intermédiaire des tétraédroïdes sphériques. La déformation indiquée ci-dessus amène alors φ_h sur une variété V_h de S en remplissant les conditions imposées.

V_h a pour homologues sur Σ une variété V′ formée d'un nombre fini de tétraédroïdes sphériques ayant moins de $n-1$ dimensions. Donc V′ ne remplit pas tout Σ. On peut alors ramener V′ à zéro sur Σ comme on le voit facilement en faisant une inversion ayant pour pôle un point de Σ non sur V′. Dans cette inversion, une portion de Σ contenant tout V′ devient l'intérieur d'une sphère à $n-2$ dimensions d'un espace à $n-1$ dimensions. La réduction à zéro à l'intérieur de cette sphère est immédiate. Donc V peut se réduire à zéro sur S. La réunion des deux déformations indiquées démontre le théorème.

THÉORÈME. — *Étant donné* Δ, *on peut déterminer* ε *tel que toute variété* V_h *à* h *dimensions* ($h \leqq n-2$) *dont chaque point a, avec* S, *un écart inférieur à* ε *peut se réduire à zéro, chacun de ses points gardant avec* S *un écart inférieur à* Δ.

Nous pouvons prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_2$, ε_2 étant le nombre déterminé par le théorème précédent. Prenons en effet une variété polygonale φ_h correspondant à V_h et dont chaque point ait avec son homologue sur V_h un écart inférieur à ε. Soit M un point de V_h, m son homologue sur φ_h et M′ un point de S tel que $MM' < \varepsilon$. On a alors $M'm < \varepsilon_2$, et comme on a aussi $MM' < \varepsilon_2$, tout point du segment Mm est à une distance de M′ inférieure à ε_2. On peut donc passer de V_h à φ_h de façon que tout point garde avec S un écart inférieur à ε_2, donc à Δ. Mais φ_h est dans les conditions du théorème précédent. Le théorème est établi.

32. Théorème. — *Soient* S *une surface simplement connexe sans point multiple et d un ensemble de points dont chacun a avec* S *un écart supérieur à un certain nombre* Δ. *Il existe un nombre* ε *tel que toute variété* V_h *à h dimensions* ($h \leq n-2$), *dont chaque point a avec* S *un écart inférieur à* ε, *n'est enlacée avec aucune des variétés à* $n-h-1$ *dimensions qu'on peut constituer avec les points de d.*

Le nombre ε déterminé par le théorème précédent remplit ces conditions. On peut en effet réduire V_h à zéro, chaque point de V_h gardant avec S un écart inférieur à Δ, donc sans couper *d*.

Ces théorèmes sont encore vrais si S est une calotte simplement connexe sans point multiple, homéomorphe par définition à une demi-hypersphère Σ à $n-1$ dimensions. Le théorème précédent est même dans ce cas valable pour $h = n-1$. En effet, on peut toujours réduire à zéro sur la demi-hypersphère Σ une variété à $n-1$ dimensions tracée sur elle. Ceci tient à ce que Σ est homéomorphe à un tétraédroïde à $n-1$ dimensions.

33. Soient une surface simplement connexe sans point multiple S et *d* un ensemble de points dont chacun a avec S un écart supérieur à Δ. Considérons le nombre ε donné par le théorème précédent. Envisageons maintenant un pavage de l'espace E_n à l'aide de cubes à n dimensions, égaux et ayant un diamètre inférieur à ε. Conservons ceux de ces cubes qui touchent S. Ils forment un domaine D d'un seul tenant, contenant S à son intérieur et dont

chaque point a avec S un écart inférieur à ε. Donc toute variété ayant au plus $n-2$ dimensions, tracée dans D, n'est enlacée avec aucune des variétés extraites de d. D est un domaine limité par des variétés polygonales à $n-1$ dimensions.

Je dirai, pour abréger, qu'en construisant D, *j'ai enfermé* S *dans un domaine polygonal* D *non enlacé avec d.*

La même définition s'applique si S est une calotte simplement connexe sans point multiple. Les variétés envisagées dans D peuvent alors aussi avoir $n-1$ dimensions.

34. Comme première application de ces propriétés, démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient, dans l'espace à n dimensions* E_n, *une surface simplement connexe sans point multiple* S *et deux variétés fermées* V_h, V_{n-h-1}, *à h et* $n-h-1$ *dimensions, sans point commun, enlacées, et sans point commun avec* S. *Ces deux variétés sont dans une même région de* S.

Dans cet énoncé, on suppose $1 \leq h \leq n-2$, donc $n \geq 3$.

Enfermons S dans un domaine polygonal D non enlacé avec l'ensemble $V_h + V_{n-h-1}$. Soit V′ une variété polygonale correspondant point à point à V_h, très voisine de V_h, de sorte qu'elle n'a pas de points communs avec D. V′ et V_{n-h-1} sont enlacées. Je dis que V_{n-h-1} et V′, donc aussi V_h, sont dans la même région extérieure à D, donc dans la même région par rapport à S. Faisons en effet passer par V′ une calotte polygonale à $h+1$ dimensions W et modifions-la légèrement, si c'est nécessaire, de façon qu'une variété à r dimensions de W ne coupe une variété à s dimensions limitant D que pour $r+s \geq n$. Dans ces conditions, les intersections de W et de la frontière de D sont des variétés polygonales à h dimensions $V'_1, V'_2, \ldots, V'_p$. Nous ne considérons que celles qui limitent la portion W_0 de W située dans la région R extérieure à D qui contient V′.

Si V_{n-h-1} n'était pas dans cette région R, W_0 ne rencontrerait pas V_{n-h-1}. Donc (n° **29**), la somme des coefficients d'enlacement des variétés V′, V'_1, V'_2, …, V'_p avec V_{n-h-1} serait nulle, et

comme V'_1, V'_2, ..., V'_p, tracées sur D, ne sont pas enlacées avec V_{n-h-1}, il en serait de même de V′, donc de V.

Il faut remarquer que les variétés V′, W, V'_1, V'_2, ..., V'_p peuvent avoir des points singuliers. Mais cela n'influe à aucun moment sur notre raisonnement, car, si l'on décompose ces variétés en éléments convenablement choisis, ces éléments seront sans points singuliers; seulement il arrivera que deux éléments aient des points communs bien qu'ils ne doivent pas être considérés comme contigus, de sorte qu'il faudra parfois considérer des points géométriquement confondus comme analytiquement distincts.

II. — Les courbes planes et les courbes sphériques.

35. Nous allons étendre les résultats du Chapitre I et justifier l'énoncé suivant : Soient, dans l'espace E_3, deux courbes de Jordan sans point multiple C et *c* (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées) planes ou sphériques, on peut passer de l'une à l'autre par une déformation homéomorphe de l'espace, n'altérant qu'une région bornée. Il en résultera que la correspondance entre C et *c* s'étend à tout l'espace.

36. Théorème. — *Si, par une déformation homéomorphe d'une surface bornée* S *en elle-même, laissant fixes les points frontières de* S, *s'il y en a, on peut transformer une figure* F *en une figure* F′; *on peut aussi transformer* F *en* F′ *par une déformation homéomorphe d'une partie bornée de l'espace en elle-même, pourvu que, en chaque point m de* S, *il existe une normale à* S *qui varie de façon continue avec m, et pourvu que, pour* H *assez petit, le segment* N′*m*N *normal à* S, *de milieu m et de longueur* 2 H *passe, quand m varie sur* S, *une seule fois par chaque point du domaine* D *qu'il balaie.*

Tout point P de D est bien déterminé par le pied *m* du segment normal, unique, qui passe par P et par le nombre *h*, $(-H \leqq h \leqq +H)$, qui mesure le segment *m*P, le sens positif étant celui des normales dirigées d'un côté déterminé de S. Le point P sera dit *le point* $\{m, h\}$.

La déformation homéomorphe de S′ est supposée donnée en

fonction d'un paramètre t variant de 0 à 1 ; $p[m, t]$ désigne la position, à l'instant t, du point qui, à l'instant 0, est sur S en m.

La déformation homéomorphe de l'espace est ainsi définie : elle laisse immobiles les points extérieurs à D. Le point P qui, à l'instant 0, était en $\{m, h\}$ est, à l'instant t, $(0 \leq t \leq 1)$, en

$$\left\{ p\left[m, t\left(1 - \frac{|h|}{H}\right)\right], h \right\}.$$

37. Soient deux courbes C et c d'un même plan. Enfermons-les dans une courbe sans point multiple Γ (une circonférence par exemple). On peut passer de C à c par déformation de l'intérieur de Γ (nos **25** et **26**). Or l'intérieur de Γ remplit les conditions du théorème précédent, donc on peut passer de C à c par la déformation indiquée au n° **33**.

Le cas des courbes planes non situées dans un même plan sera étudié au numéro suivant.

38. Courbes sphériques. — Soit C une courbe de Jordan sans point multiple tracée sur une sphère S. Je dis qu'il existe un point O de S non situé sur C. Soit M un point de C, transformons S en un plan Σ par une inversion de centre M et partageons C en deux arcs C′, C″ par deux points situés de part et d'autre de M. L'arc C″ contient M; nous le supposons assez petit pour que son transformé Γ″ soit tout entier extérieur à une circonférence λ du plan Σ. L'arc L′ transformé de C′ ne remplit pas tout λ; il y a donc, dans λ, un point ω qui n'appartient ni à Γ′ ni à Γ″. Son transformé O répond à la question.

Il suffit maintenant de faire une inversion de centre O pour déduire les propriétés de la courbe sphérique C de celles des courbes planes et prouver en particulier la possibilité de transformer, de façon continue, une courbe sphérique en une autre tracée sur la même sphère.

Soient maintenant deux courbes fermées C et c tracées sur des plans ou sphères P, p. Coupons P et p par une sphère S qui donne les intersections Γ, γ. Nous savons déformer C en Γ, puis Γ en γ, enfin γ en c ; si C et c étaient ouvertes nous pourrions les considérer

comme des parties de deux courbes fermées $C + C'$, $c + c'$. L'énoncé du n° **35** est établi.

III. — Les courbes tracées sur le tore.

39. Soit T un tore dont nous désignerons les deux rayons par r et R ($r < R$). Supposons que l'origine des coordonnées soit au centre du tore et que l'axe des z soit l'axe du tore. Nous pouvons alors exprimer les coordonnées x, y, z d'un point M quelconque de T en fonction de deux paramètres ω, φ par les formules

$$(1) \qquad (T) \begin{cases} x = (R + r\cos 2\pi\varphi)\cos 2\pi\omega, \\ y = (R + r\cos 2\pi\varphi)\sin 2\pi\omega, \\ z = r\sin 2\pi\varphi. \end{cases}$$

A chaque système de valeurs de ω, φ correspond un point et un seul de T et à chaque point de T correspond un système de valeurs de ω, φ dont chacune est définie à un entier près.

Soit un plan Π dans lequel nous avons pris deux axes de coordonnées $o\omega$, $o\varphi$. A un point M de T nous ferons correspondre le point m de Π qui a pour coordonnées les valeurs ω, φ des paramètres de M. Si l'on prend les divers systèmes possibles pour ω, φ, on obtient les diverses représentations de M sur Π. Ces représentations se déduisent de l'une d'elles par les translations définies par des vecteurs dont chacune des projections est entière. Considérons dans Π les parallèles aux axes d'abscisse ou d'ordonnée entière. Ces droites décomposent Π en carrés dont chacun représente une fois et une fois seulement tout T, sauf en ce qui concerne les frontières de ces carrés pour lesquelles il y a lieu de prendre une précaution évidente.

Soit s une région de Π limitée par une courbe de Jordan sans point multiple. s représente une certaine région S de T. Supposons qu'il n'existe *aucun vecteur de projections entières* dont les deux extrémités appartiennent à s (frontière comprise). Dans ces conditions la correspondance entre S et s est *biunivoque et continue*. S est alors une calotte simplement connexe sans point multiple.

40. Soit C une courbe de Jordan tracée sur T. x, y, z sont fonctions continues d'un paramètre t que nous supposerons varier de 0 à 1. Pour chaque point de la courbe, on peut alors définir des déterminations de ω et φ fonctions continues de t :

$$\omega = \omega(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{2}$$

Le point représentatif sur Π décrit alors une courbe de Jordan c. Soient α, β les accroissements respectifs de ω, φ quand t varie de 0 à 1 : $\alpha = \omega(1) - \omega(0)$, $\beta = \varphi(1) - \varphi(0)$. Ces nombres sont évidemment indépendants de la détermination prise pour ω, φ.

Si l'on changeait de paramètre en posant $t = f(t')$, les nombres α, β ne seraient pas non plus changés, sous la réserve que f soit une fonction croissante. Dans le cas contraire, ils seraient changés de signe. Ces deux nombres α, β sont donc parfaitement définis par la courbe, si on la suppose orientée.

La courbe C est *ouverte et sans point multiple*, si, a et b étant entiers, les deux équations

$$\omega(t) - \omega(t') = a, \qquad \varphi(t) - \varphi(t') = b$$

ne peuvent être vérifiées simultanément que pour $a = 0$, $b = 0$, $t = t'$. *La représentation c de* C *est alors un arc de Jordan sans point multiple.* Deux représentations différentes de C sont sans point commun; et il n'y a pas de vecteurs à projections entières dont les extrémités soient sur une même représentation de C. L'un au moins des nombres α, β relatifs à C n'est pas entier.

La courbe C définie par les fonctions (2) est *fermée et sans point multiple*, si les mêmes équations sont vérifiées seulement lorsque l'on a : ou bien $t = t'$, $a = 0$, $b = 0$; ou bien $t = 1$, $t' = 0$, auquel cas $a = \alpha$, $b = \beta$. *Si* α et β *sont nuls, la représentation c de* C *est une courbe fermée sans point multiple.* Il n'y a pas de vecteur à projections entières ayant ses extrémités sur c et deux représentations différentes de C ne se coupent pas.

Si l'un au moins des nombres α, β *n'est pas nul, c est une courbe ouverte sans point multiple.* Le vecteur qui joint ses extrémités est le seul vecteur de projections entières (d'ailleurs égales à α et β) dont les extrémités sont sur c. Ces deux extrémités appartiennent

chacune à une autre représentation de C et il n'y a que ces deux points de c qui appartiennent à d'autres représentations.

Quand la courbe C est fermée, les nombres α, β représentent en grandeur et en signe les *coefficients d'enlacement de* C *avec l'axe de* T *et le lieu des centres des méridiens de* T. Par coefficient d'enlacement avec l'axe du tore, j'entends le coefficient d'enlacement avec une courbe formée par une demi-circonférence concentrique du tore, de rayon supérieur à $R + r$, dont le diamètre est porté par l'axe du tore, et le diamètre de cette demi-circonférence. Elle est supposée orientée de façon qu'en la décrivant dans le sens positif, la cote aille en croissant sur la partie rectiligne. Le lieu des centres des méridiens est orienté suivant le sens positif du plan des xy. Nous supposons C orientée dans le sens des t croissants.

On pourrait démontrer dès maintenant ces propriétés des nombres α, β; je les établirai plus tard pour chaque cas.

41. Courbes ouvertes. — Soit C une courbe de Jordan ouverte sans point multiple tracée sur T. Les diverses représentations c, c', ... de C sur le plan II sont des arcs sans point multiple et sans point commun. Chacun d'eux a un écart non nul avec les autres. Soit ε un nombre inférieur à cet écart (le fait qu'il y a une infinité de représentations n'empêche pas de déterminer ε parce qu'il n'y en a qu'un nombre fini dans une région bornée). Enfermons une représentation particulière c dans une chaîne régulière ouverte g dont chaque chaînon a un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Je dis que g représente de façon biunivoque et continue une région de T. Supposons en effet (n° **39**) qu'il y ait un vecteur pp' de projections entières ayant ses deux extrémités dans g. Il existe deux points mm' de c tels que $mp < \frac{1}{2}\varepsilon$, $m'p' < \frac{1}{2}\varepsilon$ (n° **19**). Soit m_1 un point tel que $(mm_1) = (pp')$. m_1 représente le même point que m et se trouve alors sur une autre représentation c' de C. Mais on a $m_1 p' = mp$, donc $< \frac{1}{2}\varepsilon$ et par suite $m'm_1 < \varepsilon$. Ceci est impossible puisque ε est inférieur à l'écart de c et c'.

Traçons dans g un segment de droite c_1 parallèle à l'axe $o\omega$.

Il représente un arc de parallèle C_1 de T. On peut passer de c à c_1 par une déformation continue de la région g n'altérant pas la frontière (n° **25**). g étant homéomorphe à une région G de T, on peut passer de C à C_1 par une déformation continue de T en lui-même. Le tore T satisfaisant aux conditions du n° **36**, on peut passer de la courbe C à la courbe plane C_1 par une déformation continue de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

*Les courbes ouvertes tracées sur le tore peuvent donc être ajoutées à celles qui figurent dans l'énoncé du n° **35**.*

42. COURBES FERMÉES DONT LA REPRÉSENTATION EST FERMÉE. — Soit C une telle courbe ($\alpha = \beta = o$). Considérons une représentation particulière c de C et soit ε un nombre inférieur à l'écart de c avec les autres représentations de C. Enfermons c dans une chaîne régulière fermée g dont chaque chaînon a un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Soient l, l' les deux contours de cette chaîne (l' intérieur à l). Je dis que l'intérieur s de l représente de façon biunivoque et continue une région S de T. Il me suffit de prouver qu'il n'existe pas de vecteur à projections entières dont les extrémités appartiennent à s.

Supposons qu'il existe un tel vecteur pp'. Déplaçons-le sur la droite qui le porte jusqu'à ce qu'une de ses extrémités p vienne sur l; l'autre extrémité p' appartient encore à s. Elle ne peut pas appartenir à g, car le raisonnement du numéro précédent s'appliquerait encore à la chaîne g et par suite il n'y a pas de vecteur à projections entières ayant ses extrémités dans g. Ainsi p' est intérieur à l', donc à c. Soient m un point de c tel que $mp < \frac{1}{2}\varepsilon$ et m' le point tel que $(mp) = (m'\,p')$. mm' est un vecteur à projections entières, donc m' appartient à une représentation c' de C différente de c. m' ne peut pas être dans g, car il aurait un écart inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$ avec c; m' ne peut pas être extérieur à l, car le vecteur $m'\,p'$ ayant ses extrémités dans deux régions différentes de c couperait c en un point m'' et l'on aurait $m'\,m'' < m'\,p'$, donc encore $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc m' est intérieur à l'. La courbe c' qui con-

tient m' a donc ce point à l'intérieur de c. Elle se déduit de c par la translation (mm'); elle a donc des points à l'extérieur de c, par exemple le point qui se déduit par la translation (mm') du dernier point de rencontre avec c de la demi-droite mm'. Donc c' coupe c, ce qui est impossible. La propriété est établie.

Soient m un point de l'intérieur de l et M le point de T qu'il représente. Traçons de M comme centre une sphère de rayon assez petit pour qu'elle coupe T suivant une courbe C_1 sans point multiple et dont tous les points appartiennent à la région S de T homéomorphe de l'intérieur s de l. C_1 est représentée par une courbe c_1 intérieure à l; c_1 est fermée et sans point multiple. On peut passer de c à c_1 par déformation homéomorphe de s sans altérer l, donc on peut passer de C à la courbe sphérique C_1 par déformation homéomorphe de T sur lui-même et par suite de C à C_1 par déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

Les courbes fermées C *tracées sur un tore et pour lesquelles* $\alpha = \beta = 0$ *peuvent donc encore être ajoutées à celles de l'énoncé du n°* **35**.

α et β sont bien les coefficients d'enlacement de C avec l'axe du tore et le lieu des centres des méridiens, car c peut se réduire à o à l'intérieur de l, donc C peut se réduire à o sur T, c'est-à-dire sans couper ni l'axe, ni le lieu des centres des méridiens.

43. Courbes fermées dont la représentation est ouverte. — Nous supposons maintenant que l'un au moins des deux nombres α, β n'est pas nul. Les représentations de C sont des courbes ouvertes. Soit c l'une d'elles d'extrémités m_0, m_1, ayant respectivement pour coordonnées ω_0, φ_0; ω_1, φ_1. Le vecteur m_0m_1 est le seul vecteur à projections entières dont les extrémités soient sur c; ses projections sont d'ailleurs α, β.

Supposons que nous fassions une déformation homéomorphe de T en lui-même. ω_0, ω_1, φ_0, φ_1 varient de façon continue; donc $\omega_1 - \omega_0$, $\varphi_1 - \varphi_0$ varient de façon continue et par suite restent fixes et égaux à α, β. Au cours d'une telle déformation, c restera donc une courbe ayant la même propriété que c : le vecteur joignant ses extrémités est le seul vecteur à projections entières dont les extrémités sont sur c et ce vecteur a pour projections α, β. Nous allons

envisager dans la suite un certain nombre de telles déformations que nous définirons chacune par la déformation d'une portion du plan H représentant de façon biunivoque et continue une région de T. Nous arriverons finalement à amener c à être un segment de droite, qui aura alors pour projections α, β et aucune portion de ce segment de droite n'aura ses deux projections entières.

44. Traçons, ce qui est possible, deux chemins reliant m_0 et m_1 et constituant une courbe fermée γ contenant c à son intérieur, les points m_0 et m_1 étant les deux seuls points de c situés sur γ. De plus, γ devra être telle qu'elle ne contienne que le segment $m_0 m_1$ qui ait ses deux projections entières. Sauf en ce qui concerne m_0 et m_1, l'intérieur de γ est une image univoque et continue d'une région du tore.

Traçons une ligne polygonale c_1 joignant m_0 et m_1, intérieure à γ et n'ayant que m_0 et m_1 pour points limites de ses sommets. On peut (n° **27**) déformer c en c_1 en n'altérant que l'intérieur de γ.

Soit m_0 un point de c_1 autre que m_0 et m_1 et prolongeons c_1 au delà de m_1 en effectuant sur l'arc $m_0 m_0'$ de c_1 la translation $m_0 m_1$. La courbe c' ainsi obtenue, $m_0' m_1'$ est analogue à c, seulement elle est polygonale et n'a un nombre infini de côtés qu'au voisinage du point m_1. Si donc on opère sur c' comme sur c, on pourra prendre un contour γ' formé d'un nombre fini de segments et une ligne c_1' polygonale d'un nombre fini de côtés.

Or les opérations qui nous ont ainsi fait passer de c à c_1' sont les images de déformations continues n'intéressant que le voisinage de C. Par de telles déformations, on peut donc amener c à être formé d'un nombre fini de segments. J'appelle encore c la ligne ainsi obtenue.

45. La ligne c ayant un nombre fini de sommets, nous pouvons supposer, quitte à faire une déformation représentée par un accroissement de ω et de φ, que les sommets de cette ligne n'ont aucune de leurs coordonnées entières. c est alors découpé par les côtés du quadrillage de H en tronçons. Les extrémités de ces tronçons appartiennent chacune à un seul côté de c et ce côté traverse en

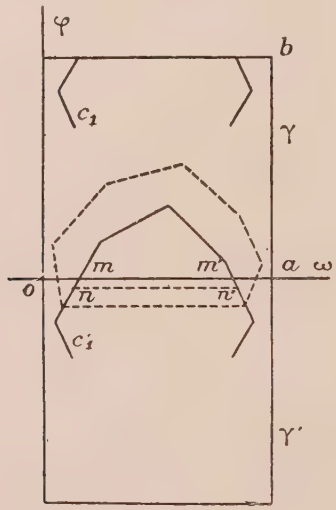
ce point le côté du quadrillage. Je supposerai encore, ce qui est également légitime, qu'aucun sommet du quadrillage n'est sur c.

Considérons le carré γ du quadrillage qui a pour côtés les segments (0, 1) de $o\,\omega$ et $o\,\varphi$, soit $oabc$ son contour. Faisons subir à chaque tronçon de c la translation qui l'amène dans γ. Nous avons une nouvelle représentation c_1 de C. c_1 est formé de tronçons allant d'un côté de γ à un autre côté. Leurs extrémités en nombre fini se correspondent deux à deux : sur oa et cb par abscisses égales; sur ab et oc par ordonnées égales. Il n'y a pas d'extrémité aux sommets o, a, b, c de γ.

Les tronçons de c_1 sont de trois sortes :

Première catégorie. — Tronçons dont les extrémités sont sur un même côté de γ. Soit mm' un tronçon de cette nature dont les extrémités sont sur oa, par exemple. S'il y a d'autres extrémités

Fig. 9.

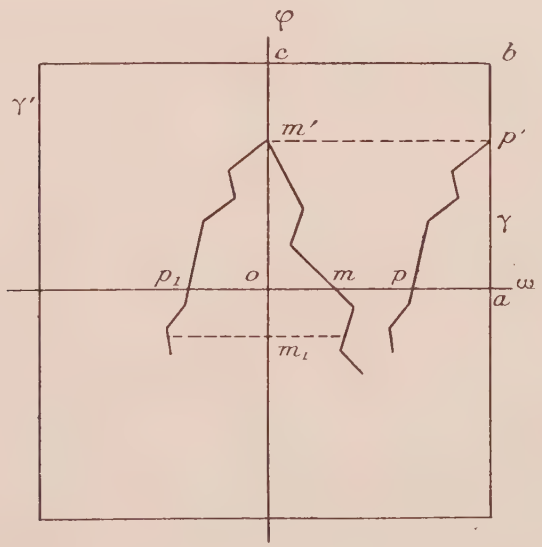


de tronçons entre m et m', ils ne peuvent être que de cette nature, puisque c_1 est sans point multiple. Il y en a alors un, mm', tel que l'arc mm' et le segment mm' déterminent une région ne contenant pas de points de c_1. Cette région est homéomorphe à une portion P de T (*fig.* 9).

Par une déformation n'intéressant qu'une portion de T contenant P et différant aussi peu de P que nous le voudrons, nous pouvons remplacer C par une courbe telle que la partie $n\,m\,m'\,n'$ de c_1, n et n' étant très voisins de m et m', devienne le segment nn'. Par cette opération répétée nous supprimerons tous les tronçons de c_1 qui sont de première catégorie.

Deuxième catégorie. — Les tronçons dont les extrémités sont sur deux côtés de γ comprenant un angle de γ. Je dirai qu'un tel tronçon est *relatif à cet angle*. S'il existe un tronçon relatif à l'angle o il en existera un relatif à cet angle, soit mm', tel qu'entre o et m et entre o et m', il n'y ait pas d'autres extrémités de tronçons. Supposons alors qu'il existe des tronçons relatifs aux angles consécutifs o et a et soient mm', pp' ceux de ces tronçons tels que mm' et pp' sont les extrémités de tronçons les plus rapprochées de o ou a.

Fig. 10.



On a alors $om' = ap'$ (*fig.* 10). Envisageons le carré γ' contigu à γ le long de oc et dans ce carré le tronçon $m'p_1$ homologue de pp'. On peut comme tout à l'heure remplacer un arc un peu supérieur à $p_1 m' m$ par un arc sans points dans γ et γ' et coupant en un seul

point m_1 le prolongement de co. Dans cette opération nous faisons disparaître les quatre extrémités m, m', p, p' et nous faisons apparaître les deux extrémités homologues de m_1, donc nous diminuons le nombre des extrémités de tronçons. Il peut d'ailleurs réapparaître des tronçons de la première catégorie que nous ferons aussitôt disparaître comme il a été dit plus haut et cela ne peut que diminuer encore le nombre des tronçons.

Nous pourrons répéter une telle opération tant qu'il restera des tronçons relatifs à deux angles consécutifs. Comme nous diminuons chaque fois le nombre des tronçons, nous arriverons à ne plus en avoir de cette sorte, le nombre total des tronçons étant fini.

Les tronçons de deuxième catégorie qui restent sont alors nécessairement relatifs à deux angles opposés, supposons, pour fixer les idées, qu'ils soient relatifs aux angles a et c.

Troisième catégorie. — Les tronçons dont les extrémités sont sur deux côtés opposés de γ. S'il y a de tels tronçons allant de oa à bc, il ne pourra pas y en avoir qui aillent de ab à oc. Supposons par exemple que nous soyons dans ce cas.

Supposons qu'il y ait r extrémités de tronçons sur ab et oc et s sur oa et bc. Parcourons à partir de a les deux chemins abc et aoc, et numérotons sur chacun de ces chemins les extrémités de tronçons dans l'ordre où nous les rencontrons. Les extrémités d'un même tronçon portent le même numéro, car les tronçons ne se coupent pas et chacun d'eux passe entre a et c.

Enfermons un segment un peu inférieur à ab dans un rectangle homéomorphe à une portion de T et déformons l'intérieur de ce rectangle de façon que les extrémités de tronçons sur ab viennent aux milieux des segments obtenus en coupant ab en r parties égales. Faisons une déformation analogue relativement à oa. Ceci fait, nous pouvons par des déformations successives du type envisagé, faire en sorte que les tronçons deviennent des segments de droite joignant les extrémités que nous venons de déterminer. Ces segments sont alors parallèles et par suite c *est un segment de droite.*

Nous pouvons enfin faire une dernière déformation amenant l'extrémité initiale de c au point o (accroissement fixe de toutes les

valeurs de ω et accroissement fixe de toutes les valeurs de φ). Soit c' le segment ainsi obtenu et soit C' la courbe de T qu'il représente.

46. D'après la remarque de la fin du n° **43**, c' a pour projections $\alpha\beta$, les coordonnées de son extrémité sont α, β. Il en résulte que c' et par suite C' a pour équations

$$(3)\quad (C') \qquad \omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

On passe de C à C' par déformation continue sur T, donc C a les mêmes coefficients d'enlacement que C' avec l'axe et le lieu des centres des méridiens. Calculons par exemple ce dernier. Le cercle limité par le lieu des centres des méridiens coupe T suivant la circonférence $\varphi = \frac{1}{2} +$ entier. On aura un point de traversée positive chaque fois que c' coupera une droite $\varphi = \frac{1}{2} +$ entier, la coordonnée φ allant en croissant sur c'. La somme de ces traversées est manifestement β; ce nombre est donc le *coefficient d'enlacement* de C avec le lieu des centres des méridiens. On trouve de même que α est le coefficient d'enlacement de C avec l'axe de T.

Nous avons également remarqué qu'aucune portion de c' n'avait ses deux projections entières. Il en résulte que si aucun des nombres α, β n'est nul, *ces deux nombres sont premiers entre eux.* Si β par exemple est nul, c' est porté par l'axe $o\omega$ et la même remarque montre que $\alpha = \pm 1$. De même si $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$ [1].

Si l'un au moins des nombres α, β n'est pas nul, C est enlacée soit avec l'axe, soit avec le lieu des centres des méridiens. Elle ne peut donc pas se réduire à o sans couper une de ces courbes, c'est-à-dire sans quitter T. Je dis de plus que C ne partage pas T en régions. Il suffit de le prouver pour C'. Les représentations de C' forment des droites parallèles qui découpent β segments égaux

---

(1) Si une courbe fermée C a des points multiples, les accroissements α, β de ω et φ, quand on la décrit complètement, sont encore ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens; mais ces nombres ne sont plus nécessairement premiers entre eux.

sur oa et α sur oc. Soient m_1, m_2 les points de γ qui représentent deux points donnés M_1, M_2 de T, non sur C'. Menons par m_1 m_2 des demi-droites parallèles à $o\varphi$ et soient p_1, p_2 les premiers points de rencontre avec les représentations de C'; p_1 sera sur une certaine représentation c'_1 et p_2 sur c'_2. Soit p'_2 le point de c'_1 homologue de p_2 et construisons le vecteur $p'_2 m'_2$ équipollent à $p_2 m_2$. Le segment de droite $m_1 m'_2$ représente une courbe qui, sur T, joint M_1 M_2 sans couper C'. Ces points étant quelconques, C' ne partage pas T en régions.

47. Je vais maintenant établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* C *une courbe de Jordan fermée sans point multiple tracée sur un tore et* α, β *ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens. Pour que la correspondance entre* C *et une circonférence puisse s'étendre à tout l'espace, il faut et il suffit que l'un des nombres* α, β *soit égal à* 0, *à* $+1$ *ou à* -1. *Quand cette extension est possible, on peut passer de* C *à la circonférence par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée.*

48. Montrons d'abord que ces conditions sont suffisantes. Ceci est déjà fait pour le cas $\alpha = \beta = 0$ (n° **42**). Supposons que l'un au moins des nombres α, β ne soit pas nul, et raisonnons sur la courbe C' définie par les équations (3). Si α ou β est nul, C' est un méridien ou un parallèle de T, donc une circonférence et la proposition est évidente. Il ne reste donc à étudier que le cas $\alpha\beta \neq 0$.

Soit d'abord $\alpha = \pm 1$. Un demi-plan quelconque mené par l'axe du tore coupe C' en un seul point. En effet, ce demi-plan coupe T suivant le méridien $\omega = \omega_0$ et les points de C' sur ce méridien ont pour paramètres les racines de l'équation $w_0 + k = \alpha t$, k étant un entier quelconque. Mais comme $\alpha = \pm 1$ et que t est compris entre 0 et 1, cette équation a une racine t et une seule. La projection C'_1 de C' sur le plan des xy est donc sans point multiple. Soit S le cylindre projetant C' sur le plan des xy, limité à deux courbes L, L' de cotes $+r$ et $-r$. Nous pouvons passer de C' à C'_1 par une déformation homéomorphe de S n'altérant pas les

frontières L, L′, qu'on définirait comme celles considérées précédemment, nos **25**, **27**.

Comme S vérifie manifestement les conditions du théorème du no **36**, on peut passer de C′ à la courbe plane C'_1 (donc aussi à une circonférence) par une déformation de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

Reste le cas $\beta = \pm 1$. Mais il n'y a, en réalité, aucune différence essentielle entre α et β; une inversion dont le pôle est sur le lieu des centres des méridiens de T, transforme T en un tore T′, les méridiens de T en les parallèles de T′ et inversement, donc elle transforme C en une courbe C′ pour laquelle $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$.

Les conditions sont donc bien suffisantes.

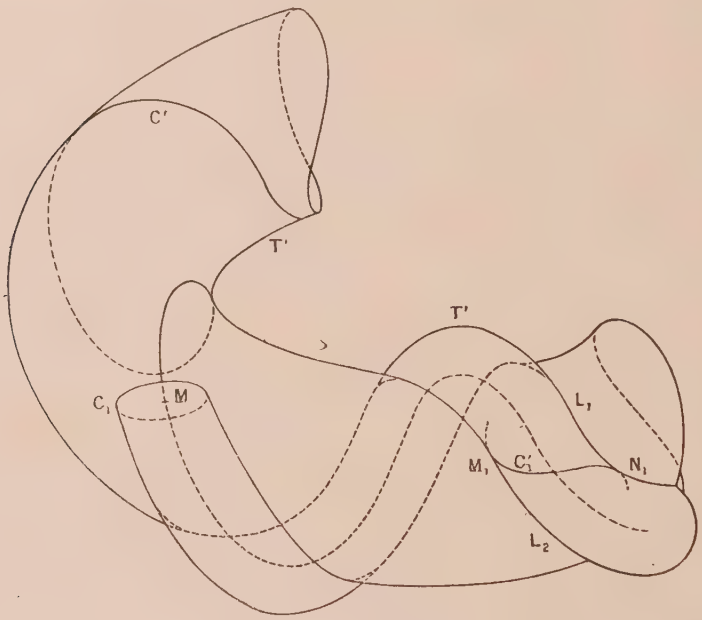
49. Pour montrer que les conditions sont nécessaires, supposons que la correspondance entre C et une circonférence puisse s'étendre à tout l'espace. Il en est alors de même de la correspondance entre C′ et la circonférence. Au cercle limité par la circonférence, correspond une calotte simplement connexe sans point multiple Σ ayant C′ pour frontière. *Nous allons montrer que s'il existe une telle calotte* Σ *et si aucun des nombres* α, β *n'est nul, l'un d'eux est, en valeur absolue, égal à* 1.

Considérons une *surface auxiliaire* T′, enveloppe d'une sphère de rayon constant ρ dont le centre décrit C′. Nous prendrons ρ assez petit pour que T′ soit sans point multiple. Alors T′ est le lieu d'une circonférence G dont le centre décrit C′, qui a ρ pour rayon, et dont le plan est normal à C′; par chaque point de T′ il passe une circonférence C et une seule. G, étant petite, coupe T en deux points M_1, M_2 qui décrivent deux courbes L_1, L_2. Si le point M décrit C′ dans le sens positif, M_1 et M_2 décriront L_1, L_2 dans des sens que je prendrai pour sens positifs de ces courbes. Les trois courbes C′, L_1, L_2 étant ainsi orientées, je dis qu'elles ont deux à deux un *coefficient d'enlacement égal à* $\alpha\beta$, donc différant de o dans les hypothèses où nous nous sommes placés.

Envisageons une représentation de T sur le plan H. Soient c' un vecteur de projections α, β représentant C′, et m la représentation sur c' d'un point M de C′. L'arc $M_1 MM_2$ suivant lequel le cercle

limité par G coupe T est représenté par un arc $m_1\, mm_2$. Nous supposerons ρ assez petit pour que mm_1, mm_2 soient toujours inférieurs à $\frac{1}{2}$. Soient l_1, l_2 les lieux de m_1, m_2, quand M décrit C′. Les projections de l_1, l_2 sont entières puisque L_1, L_2 sont des courbes fermées. Mais comme les extrémités correspondantes de l_1 et de c' sont distantes de moins de $\frac{1}{2}$, les projections de l_1 sont égales à α et β, de même pour l_2. Donc les coefficients d'enlacement de L_1 et de L_2 avec l'axe et avec le lieu des centres de méridiens de T sont α et β.

Fig. 11.



Déformons C′ intérieurement à T (donc sans couper L_1 et L_2) chaque point de C′ décrivant un rayon de méridien. Nous amènerons ainsi C′ sur le lieu des centres des méridiens, α point de C′ venant en un même point de cette courbe. D'ailleurs C′ étant enlacé α fois avec l'axe du tore, nous pouvons dire que nous amenons C′ sur α fois la circonférence lieu des centres des méridiens. L_1 est enlacé β fois avec cette circonférence, donc $\alpha\beta$ fois

avec C'. Nous aurions pu également par une déformation extérieure à T amener C' sur β fois une circonférence concentrique à un méridien et un peu plus grande. Le résultat est le même. On a le même résultat pour les coefficients d'enlacement de C' avec L_2 et de L_1 avec L_2.

Fixons un système de coordonnées ω', φ' sur T'. Soit M' un point de T'. Il est sur une circonférence G de centre M. Le point M est déterminé sur C' par une valeur du paramètre t, entre 0 et 1 [équations (2)]. Nous prendrons ω' égal à t à un entier près. Orientons la circonférence G, par exemple dans le sens qui va de M_1 à M_2 extérieurement à T. Nous prendrons pour φ' le rapport d'une détermination quelconque de l'arc M_1M' à la longueur de G. φ' est déterminé à un entier près. La courbe L_1 a pour équation $\varphi' = 0$ à un entier près. Les courbes G ont pour équations $\omega' =$ constante.

Si nous considérons une courbe fermée tracée sur T', nous pouvons lui faire correspondre deux nombres α', β' qui seront les accroissements respectifs de ω' et de φ' quand on décrit la courbe. Pour les courbes L_1 et L_2, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$: pour les circonférences G, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$.

Nous pouvons faire la représentation de T' *sur un plan* II' comme nous avons fait la représentation de T sur un plan II. Au point M' de paramètres ω', φ', nous ferons correspondre le point m' de coordonnées ω', φ'. *Cette représentation aura des propriétés tout à fait analogues à celles de la représentation du tore.*

30. Je vais montrer que, si Σ existe, il existe sur T' une courbe C_1 ne coupant pas Σ et pour laquelle β' n'est pas nul.

Σ étant une calotte simplement connexe sans point multiple peut se représenter sur un cercle σ limité par une circonférence c'. L'ensemble des points communs à Σ et T' se représente alors suivant un ensemble fermé ayant un écart non nul avec c'. Je peux donc tracer une circonférence c'' concentrique à c' et telle que dans l'anneau compris entre ces deux circonférences il n'y ait pas de points représentant des points communs à Σ et T'. Soient C'' l'homologue de c'' et Σ' la calotte simplement connexe sans point multiple correspondant à l'intérieur de c''. Σ' a C'' pour frontière et

l'on peut passer de C′ à C″ sans couper T′ puisqu'on peut passer de c' à c'' sur l'anneau que forment ces deux courbes. C″ *est donc enlacée comme* C′ *avec toute courbe tracée sur* T′.

Σ' n'ayant pas de points sur C′, nous pouvons enfermer Σ' dans un domaine polyédral D non enlacé avec C′ (n° **33**). Soient D′ l'ensemble des points de D sur T′ et I_1, I_2, ... les frontières de D′. *La courbe* C_i *que je cherche est une des courbes* I.

Tout d'abord, les courbes I existent, c'est-à-dire qu'il y a sur T′ des points de D et des points n'appartenant pas à D. Si tout T′ n'appartenait pas à D, une circonférence G étant extérieure à D ne couperait pas Σ' et par suite ne serait pas enlacée avec C″, ce qui n'a pas lieu, puisque G est enlacée avec C′. Si tout T′ appartenait à D, la circonférence G étant intérieure à D ne serait pas enlacée avec C′, ce qui n'a pas lieu. Donc les lignes I existent. Remarquons en outre que le domaine D est formé de cubes d'un pavage de l'espace et que ces cubes satisfont à la seule condition d'avoir un diamètre inférieur à un nombre déterminé ε et de toucher Σ'. Nous pouvons donc choisir le pavage de façon qu'aucune face ni aucune arête ne soit tangente à T′ et qu'aucun sommet ne soit sur T′. Dans ces conditions, les courbes I seront en nombre fini, sans point commun et sans point multiple.

Les courbes I appartenant à la frontière de D′, donc de D, aucune d'elles ne touche Σ', ni Σ, puisque Σ est la somme de Σ' et d'une portion intérieure à T′. Il suffit donc de prouver que, parmi les courbes I, il y en a au moins une pour laquelle $\beta' \neq 0$. Ce sera la courbe C_i cherchée.

Si pour toutes les courbes I on avait $\beta' = 0$, on aurait pour ces courbes $\alpha' = 0$, $+1$, ou -1. On ne peut pas avoir, pour une courbe I, $\alpha' = +1$, car cette courbe pourrait se ramener sur T′ à la courbe L_i et, par suite, cette courbe I serait comme L_i enlacée avec C′, ce qui n'a pas lieu, I appartenant à D.

Supposons alors que pour toutes les courbes I on ait $\alpha' = \beta' = 0$.

Les représentations i des courbes I sur Π′ sont alors des courbes fermées sans point multiple et sans point commun; il y a donc une région Δ d'un seul tenant extérieure à toutes ces courbes et l'axe $o'\varphi'$ a des points dans cette région, car il ne peut être tout

entier intérieur à une seule courbe i. Soient a un point de cet axe appartenant à Δ et b le point dont l'ordonnée est égale à celle de a augmentée de 1. b représentant le même point que a est aussi dans Δ. ab représente une circonférence G. Traçons dans Δ un arc γ allant de a à b. Il représente une courbe fermée Γ, tracée sur T' et pouvant avoir des points multiples. Mais γ peut se ramener sur Π' au segment ab, a et b ne bougeant pas, donc Γ peut se ramener sur T' à une circonférence G, Γ est donc enlacée avec C' et C''. Nous arrivons à une contradiction par la remarque suivante : si Δ appartient à D (c'est-à-dire représente des points appartenant tous à D), Γ appartient à D, donc n'est pas enlacée avec C', ce qui n'a pas lieu; si Δ n'appartient pas à D, Γ ne coupe pas Σ', ce qui est encore impossible puisque cette courbe est enlacée avec C''.

Il est donc nécessaire que, pour une au moins des courbes I, β' *ne soit pas nul.* Soit C_1 cette courbe et soient α', β' les accroissements de ω' et de φ' quand on la décrit.

Considérons maintenant la courbe C'_1 tracée sur T' et qui a pour équations paramétriques

$$(4)\quad (C'_1) \qquad \omega' = \alpha' t, \qquad \varphi' = \beta' t, \qquad (\beta' \neq 0),$$

α' et β' étant les valeurs qui viennent d'être définies par C_1. On peut passer de C_1 à C'_1 par une déformation homéomorphe de T' sur lui-même, donc (n° **36**) par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée. Cette région peut d'ailleurs être prise assez voisine de T' pour que C' lui soit extérieure. A la fin de cette déformation, Σ devient une calotte simplement connexe Σ_1 ayant C' pour frontière et qui n'est pas coupée par C'_1. Donc :

31. S'il existe une calotte simplement connexe sans point multiple Σ ayant pour frontière C', il en existe aussi une Σ_1 de même frontière et qui n'est pas coupée par une certaine courbe C'_1 tracée sur T' et définie par les équations (4) où $\beta' \neq 0$ (*fig.* 11).

β' n'étant pas nul, C'_1 coupe effectivement L_1 en β' points que je désigne par $M_1, M'_1, \ldots$. Elle coupe aussi L_2 en β' points $M_2, M'_2, \ldots$. *Je vais prouver qu'il existe deux points* M_1, M_2 *consé-*

cutifs sur C'_1 *et pouvant être joints sur* T *par une courbe ne coupant pas* Σ_1.

Remarquons d'abord que les points M_1, M'_1, ... sont des points de traversée de même signe de T par C'_1 et que M_2, M'_2, ... sont des points de traversée du signe différent du premier. Ceci résulte immédiatement de la considération de la représentation de C'_1 qui est un segment rectiligne et qui coupe les droites $\varphi' =$ entier aux points représentatifs des points M_1, φ' variant toujours dans le même sens quand on passe par un tel point. Nous supposerons par exemple qu'en décrivant C'_1 on passe de l'intérieur de T à l'extérieur aux points M_1, M'_1, ... et de l'extérieur à l'intérieur aux points M_2, M'_2, ...

C'_1 ne touchant pas Σ_1, enfermons Σ_1 dans un domaine polyédral D non enlacé avec C'_1 et soit D' l'ensemble des points de D situés sur T. Il y a sur T des points de D, par exemple tout C', et des points n'appartenant pas à D, par exemple les points M_1, ... Donc D' a une frontière qui, par suite d'un choix convenable de D (remarque faite au numéro précédent), sera formée d'un nombre fini de courbes I_1, I_2, ... sans point multiple et sans point commun.

Les courbes I appartenant à D, aucune d'elles n'est enlacée avec C'_1. De même les courbes I appartenant à la frontière de D, aucune d'elles ne coupe Σ_1, donc aucune d'elles n'est enlacée avec C'. Soient alors α_1, β_1 les coefficients d'enlacement d'une de ces courbes I_1, avec l'axe et le lieu des centres des méridiens de T. Cette courbe a alors avec C' le coefficient d'enlacement $\alpha\beta_1 = \alpha_1\beta$ (*voir* le raisonnement fait au n° **49** sur les courbes C', L_1, L_2). Nous venons de dire que ce coefficient était nul, et comme α et β ne sont pas nuls, α_1 et β_1 sont nuls. Les courbes i représentant les courbes I sur Π sont donc des courbes fermées, sans point multiple et sans points communs et chacune d'elles avec son intérieur représente de façon biunivoque et continue une calotte simplement connexe sur T (n° **42**). De plus, il y a dans Π une région unique d'un seul tenant extérieure à toutes les courbes i et tous les points que représentent les points de cette région appartiennent à D, car les droites indéfinies qui représentent C' ne peuvent être que dans cette région

et C' appartient à D. Or les points $M_1, M'_1, \ldots, M_2, M'_2, \ldots$ n'appartiennent pas à D : leurs représentations $m_1, \ldots, m_2, \ldots$ sont donc chacune intérieures à une courbe i.

Soit m_1 une représentation particulière de M_1 ; elle est intérieure à une courbe i_1 et, par suite, située dans une région d'un seul tenant s limitée extérieurement par i_1 et éventuellement par des courbes i_2, i_3, ..., intérieures à i_1. Chacune de ces courbes n'est pas enlacée avec C'_1 et l'intérieur de chacune d'elles représente de façon biunivoque et continue une région de T. La somme des traversées de T par C'_1 à l'intérieur de chacune de ces régions est nulle et, par suite, il y a un nombre égal de points $m_1, m'_1, \ldots$ et de points m_2, m'_2 à l'intérieur de chacune des courbes $i_1, i_2, i_3, \ldots$. En particulier, il y a au moins un point m_2 dans s. Ce point m_2 peut alors être joint au point m_1 dans s. Ce chemin représente une courbe K_1 allant de M_1 à un certain point M_2 sur T sans couper D', donc sans rencontrer Σ_1.

Si M_1 et M_2 ne sont pas consécutifs sur C'_1, soit K'_1 l'un des arcs de C'_1 ayant pour extrémités M_1, M_2, la courbe $K_1 + K'_1$ ne coupe pas Σ_1. Les points de K'_1 au voisinage des extrémités M_1, M_2 sont dans une même région de T. Nous pouvons alors déduire de cette courbe une courbe C'_2 ne coupant pas Σ_1 et formée de : 1° la courbe K'_1, sauf deux petits arcs au voisinage des points M_1, M_2 ; 2° une courbe déduite de K_1 par une déformation au cours de laquelle chaque point décrit un rayon de méridien de T, du côté des petits arcs supprimés de K'_1 ; 3° deux petits arcs faisant le raccordement. Cette courbe C'_2 coupe T en des points qui font partie des points $M_1, M'_1, \ldots, M_2, M'_2, \ldots$, mais leur nombre est moindre.

Je peux appliquer à la courbe C'_2 les raisonnements faits sur C'_1 et joindre deux certains points M_1, M'_2 par un chemin K_2 tracé sur T et ne coupant pas Σ_1. Si M'_1, M'_2 ne sont pas consécutifs, j'envisagerai l'arc $M'_1M'_2$ de K'_1, soit K'_2, et je recommencerai sur la courbe $K_2 + K'_2$. Le nombre des points tels que M_1, M_2 allant en diminuant et l'opération pouvant se poursuivre tant qu'on n'a pas obtenu de points consécutifs sur C'_1, je finirai par en obtenir.

Appelons M_1, M_2 ces deux points consécutifs, K l'arc qui les joint sur T et K' l'arc de C'_1 sur lequel il n'y a pas de points de T en dehors

des extrémités M_1, M_2. La courbe $K + K'$ ne coupant pas Σ_1 n'est pas enlacée avec C'. C'est cette propriété que je vais maintenant utiliser.

32. Considérons une dernière courbe auxiliaire K'' joignant sur T les points M_1 et M_2. Pour préciser K'', je supposerai qu'un point M' décrit K' et qu'à chaque position de M' je fasse correspondre un point M de l'intersection de T par le cercle limité à la circonférence G passant en M'. K'' sera l'arc décrit par M que je suppose se déplacer de façon continue. Je peux supposer en outre que K'' coupe C' en un seul point M_0 et il y aura en ce point, sur T, traversée de C' et K''. On pourra d'ailleurs passer de K' à K'' dans une seule région de T, les points M_1, M_2 ne bougeant pas. La courbe fermée $K + K''$ peut avoir des points multiples, mais cela n'a aucune importance. Soient α_1, β_1 ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens de T.

Nous distinguerons deux cas suivant que K' est intérieur ou extérieur à T. Supposons d'abord K' intérieur à T. Amenons K' sur K'' par la déformation indiquée ci-dessus. Puis amenons C' intérieurement à T, à coïncider avec $|\alpha|$ fois le lieu des centres des méridiens. Le coefficient d'enlacement de cette nouvelle position de C' avec $K + K''$ est en valeur absolue $|\alpha\beta_1|$. D'autre part, C' et $K + K'$ n'étaient pas enlacées. Mais les déformations faites sont en réalité des déformations de ces courbes, au cours desquelles il y a une traversée (et une seule) en M_0. Le coefficient d'enlacement a donc augmenté d'une unité en valeur absolue. Donc $|\alpha\beta_1| = 1$. Ceci exige $|\alpha| = 1$.

Un raisonnement analogue montre que, si K' est extérieur à T, on a $|\beta| = 1$.

Donc, si la correspondance entre C et une circonférence peut s'étendre à tout l'espace, et si aucun des nombres $\alpha\beta$ n'est nul, l'un de ces nombres est égal à $+1$ ou à -1. C.Q.F.D.

33. Il résulte de ceci que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe C tracée sur un tore soit *frontière d'une calotte*

simplement connexe sans point multiple est que l'un des nombres α, β soit égal à 0, à $+1$ ou à -1.

Nous venons de prouver que cette condition était nécessaire pour C'. Elle est également nécessaire pour C, puisque la correspondance entre C et C' s'étend à tout l'espace. Elle est suffisante, car, dans ce cas, la correspondance entre C et une circonférence s'étend à tout l'espace, la calotte sera l'homologue du cercle limité par la circonférence.

Remarquons enfin que si la correspondance entre C et une circonférence ne peut pas s'étendre à tout l'espace, elle s'étend néanmoins aux voisinages de ces courbes. Il en est en effet ainsi pour C' et une circonférence : elle s'étend à l'intérieur de T' d'une part et d'autre part à l'intérieur d'un tore dont la circonférence serait le lieu des centres des méridiens.

IV. — Exemple de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes.

54. L'étude qui vient d'être faite des courbes tracées sur le tore T va nous permettre de construire un arc Γ dont la correspondance avec un segment de droite γ ne peut s'étendre à aucun voisinage.

Considérons sur T la courbe C' définie par les équations (3) du n° **46**, $\omega = \alpha t$, $\varphi = \beta t$, où t varie de 0 à 1 et où nous supposerons α et β supérieurs à 1 et premiers entre eux. Sur C', marquons deux points A, B de paramètres respectivement assez voisins de 0 et 1 pour que l'un des deux arcs AB de C', soit V, ne coupe pas les deux parallèles $\varphi = \frac{1}{4}$, $\varphi = -\frac{1}{4}$ de T. Ces parallèles limitent chacun un cercle. Ajoutons à ces cercles les points de T pour lesquels on a $-\frac{1}{4} < \varphi < \frac{1}{4}$. Nous constituons ainsi *une surface simplement connexe sans point multiple* Q que j'utiliserai dans un instant.

J'appelle V' le second arc AB de C'.

Marquons sur l'axe des z un point P de cote supérieure à $3r$. Prenons les homothétiques de C', A, B, V, V', Q par rapport à P

dans le rapport $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, n étant entier positif, et désignons ces homothétiques par la lettre correspondante affectée de l'indice n. Le choix du point P est tel que les surfaces Q_n sont extérieures les unes aux autres. Joignons BA_1 extérieurement à ces surfaces, et prenons encore les homothétiques de cette ligne. *La courbe cherchée* Γ *est formée de :* 1° les homothétiques de V′ quand on donne à n toutes les valeurs entières; 2° les homothétiques de BA_1; 3° un segment PP′ de l'axe des z, P′ ayant une cote supérieure à celle de P.

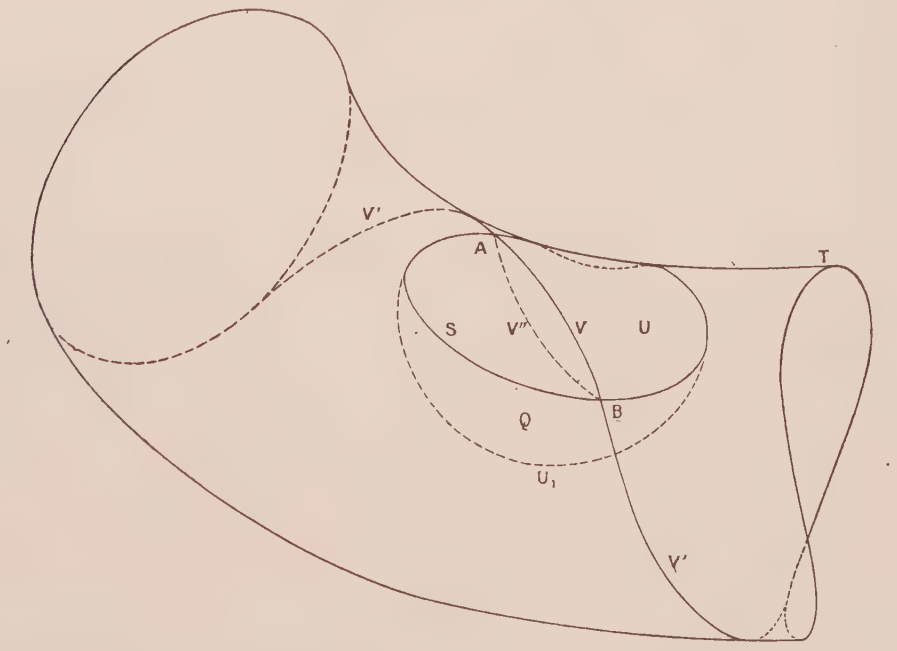
55. Supposons que la correspondance entre Γ et un segment de droite γ puisse s'étendre à leurs voisinages. Soit p l'homologue de P sur γ. Il existe une sphère de centre p et dont tout l'intérieur appartient au voisinage considéré de γ. Dans cette sphère, considérons une courbe c formée d'une demi-circonférence de centre p et de son diamètre porté par γ. Elle limite dans son plan une calotte simplement connexe σ. A c correspond une courbe C frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple Σ, homologue de σ. La courbe C est formée d'un arc, portion de Γ auquel appartient P et d'un arc ayant un écart non nul avec P (homologue de la demi-circonférence), donc extérieur à une certaine sphère de centre P. Mais je peux déterminer n assez grand pour que Q_n soit tout entier intérieur à cette sphère. C comprend donc l'arc V'_n et un arc extérieur à Q_n. Je dis qu'il est impossible qu'une telle courbe soit frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple. En raison des homothéties faites, il me suffit de prouver que *la courbe* C, *somme de* V′ *et d'un arc* V″ *extérieur à* Q, *ne peut pas être frontière d'une telle calotte.*

56. Supposons qu'il existe une calotte Σ limitée à C. Faisons une inversion par rapport à un point intérieur à T et non situé sur Σ. T se change en une surface qui lui est homéomorphe, par construction. Mais si l'on fait correspondre aux méridiens les inverses des parallèles et inversement, la correspondance peut s'étendre à tout l'espace, comme on s'en rend compte aisément, car ici il s'agit de surfaces analytiques simples. Supposons cette extension faite. Il

correspond à C′ une courbe analogue, mais pour laquelle les nombres α, β auraient été permutés, ce qui n'a aucune importance ici. A Q correspond une surface simplement connexe intérieure à T, et à V″ une courbe intérieure à la surface correspondant à Q. La nouvelle courbe C serait frontière d'une calotte Σ, la correspondante de celle limitée à l'ancienne courbe C. Remarquons d'ailleurs que nous pouvons supposer que les arcs de V″ voisins de A et B sont analytiques, et alors, par une déformation de l'espace, n'altérant que l'intérieur de Q, nous pouvons amener V″ à être intérieur à T et à la sphère de diamètre AB. Je peux enfin supposer A, B assez voisins pour que cette sphère soit intérieure à la surface T′ définie au n° **49**.

La figure obtenue est donc la suivante : la sphère de diamètre AB

Fig. 12.



est intérieure à T′. Elle découpe dans T une calotte U limitée par une courbe S et soit U_1 la portion de cette sphère intérieure à T. C est une courbe formée de V′ et d'un arc V″ allant de A à B intérieurement à la surface $Q = U + U_1$. Il s'agit de prouver que C

ne peut pas être frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple (*fig.* 12).

37. Supposons qu'il existe une calotte Σ ayant C pour frontière. Comme Q est intérieure à T', les raisonnements faits au n° **50** sur C', T' et Σ s'appliquent ici à C, T' et Σ. Il existe alors une calotte Σ_1 de frontière C qui n'est pas coupée par une courbe C'_1 de T' qui a pour équations $\omega' = \alpha t$, $\varphi' = \beta' t$ ($\beta' \neq 0$).

Enfermons Σ_1 dans un domaine polygonal D non enlacé avec C'_1 et de façon que l'intersection de D avec T (et aussi avec la surface qui s'en déduit en remplaçant U par U_1) soit constituée par un nombre fini de courbes I sans point multiple et sans point commun. Nous supposerons encore que, si une courbe I rencontre S, elle traverse S en ce point de rencontre. Les tronçons des courbes I intérieurs à U se répartissent *en deux catégories :* la première est formée des tronçons dont les deux extrémités sont sur le même arc AB de S; la seconde est formée des tronçons ayant une extrémité sur chacun de ces arcs.

Considérons d'abord les tronçons de la première catégorie. Un raisonnement, analogue à celui du n° **45**, permet de les faire disparaître, grâce à une déformation de T sur lui-même n'altérant qu'une portion un peu plus grande que U. Cette déformation pourra d'ailleurs faire sortir de U des courbes I totalement intérieures à U. Une telle déformation peut être réalisée par une déformation de l'espace n'altérant que le voisinage de U (n° **36**), donc ne modifiant pas C ni C'_1. Après cette déformation, D devient un nouveau domaine non enlacé avec C'_1 et enfermant encore une calotte limitée à C, cette calotte étant ce qu'est devenu Σ_1 après la déformation. Il n'y aura plus de tronçons de première catégorie dans U et le nombre des extrémités de tronçons aura été diminué.

Si, dans U_1, il y a des tronçons de première catégorie, je ferai un raisonnement analogue, en remplaçant U par U_1 et je ferai disparaître ces tronçons, en dimnuant toujours le nombre des extrémités sur S. La déformation pourrait peut-être faire réapparaître des tronçons de première catégorie sur U : je recommencerai alors l'opération sur U pour les faire disparaître et ainsi de suite.

J'arriverai finalement à ne plus avoir de tronçons de première catégorie, ni sur U, ni sur U_1, car chacune des opérations diminue le nombre des extrémités sur S et ce nombre est fini. Il ne restera plus que des tronçons de seconde catégorie. Si je décris les deux arcs AB de S à partir de A et que je numérote les extrémités de tronçons au fur et à mesure de leur rencontre, les extrémités ayant le même numéro ne peuvent être extrémités que d'un même tronçon dans U et d'un même tronçon dans U_1. Mais ces deux tronçons, l'un dans U, l'autre dans U_1, forment une courbe enlacée avec C. Ceci est impossible puisque les lignes I appartiennent à la frontière de D et par suite ne coupent pas Σ_1, ceci à tous les stades des déformations faites. *Il n'y a donc plus d'extrémités de tronçons sur* S. S'il y a des points des courbes I à l'intérieur de U, ils sont sur des courbes I totalement intérieures à U. Je peux alors faire une déformation de l'espace, n'altérant qu'une région très voisine de U, de façon que ces courbes ne coupent plus V. V est alors, comme A et B, totalement intérieur à D.

Nous pouvons alors reprendre les raisonnements des nos **51** et **52** en renouvelant, chaque fois que cela sera nécessaire, les déformations indiquées ci-dessus pour le domaine D. Nous en déduirons une courbe telle que $K + K'$, non enlacée avec C, comprenant une portion K' appartenant à C'_1 et une portion K sur T, extérieure aux divers domaines D, donc ne coupant pas V. Mais V'' étant intérieur à Q, on peut passer de V'' à V, et par suite de C à C' sans couper $K + K'$. $K + K'$ n'est donc pas enlacée avec C'. Le raisonnement s'achève comme au n° **52** et l'on en conclut que $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, ce qui est contraire aux hypothèses faites.

Donc la correspondance entre Γ et γ ne peut s'étendre à aucun voisinage.

58. La propriété de Γ tient à la forme de cette courbe au voisinage du point P. Appelons alors Γ' un arc de Γ quelconque, pourvu toutefois qu'il contienne le point P comme point intérieur, au sens strict. Tout arc sans point multiple dont Γ' fait partie est tel que sa correspondance avec un segment de droite ne peut s'étendre à aucun voisinage. Cet arc ne peut faire partie de la frontière d'une

calotte simplement connexe sans point multiple. De même, la correspondance entre une circonférence et une courbe fermée sans point multiple dont Γ' est un arc ne peut s'étendre à aucun voisinage. Une telle courbe ne peut pas être la frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple.

Je dis, de plus, que Γ' (et par suite toute courbe contenant Γ') *ne peut pas être considérée comme tracée sur une surface sans point multiple.* Il faut entendre dans cet énoncé le mot *surface* avec la restriction faite habituellement en *Analysis situs :* parmi les modes de décomposition de la surface en éléments, il en existe au moins un tel qu'un point donné P de la surface appartienne à un seul élément.

Supposons qu'il existe une surface contenant Γ'. Divisons-la en éléments de façon que P appartienne à un seul élément Σ. P appartenant à Σ seul, il y a un arc de Γ' ayant P comme point intérieur (au sens strict) qui appartient aussi à Σ seul.

Décrivons Γ' dans les deux sens à partir de P jusqu'aux premiers points Q, Q_1 qui appartiennent à un élément autre que Σ et appelons Γ'' l'arc QPQ_1 de Γ'. Considérons un des deux arcs QQ_1 de la frontière de Σ (celui qui ne contient pas P, si P est sur la frontière). Conservons de cet arc la portion $Q'Q'_1$ qui ne touche Γ'' qu'en ses extrémités, Q' étant sur l'arc PQ de Γ'' et Q'_1 sur l'arc PQ_1. La courbe formée de cet arc $Q'Q'_1$ de frontière et de l'arc $Q'PQ'_1$ de Γ'' limite sur Σ une calotte simplement connexe sans point multiple. Or ceci est impossible, puisque la frontière de cette calotte comprendrait un arc du type de l'arc Γ'.

V. — Correspondance entre les ensembles de courbes.

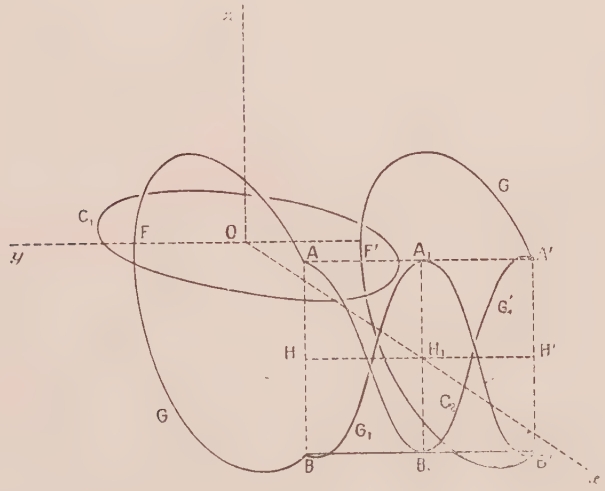
59. Pour terminer cette étude, disons un mot du cas où l'on chercherait à étendre la correspondance entre deux groupes formés chacun de deux courbes, C_1, C_2 d'une part, c_1, c_2 d'autre part, fermées, sans point multiple et sans point commun. Pour que la correspondance entre C_1, C_2 et c_1, c_2 *puisse s'étendre à leurs voisinages*, il faut et il suffit manifestement qu'il en soit ainsi pour la correspondance entre C_1 et c_1 et pour la correspondance entre C_2 et c_2.

Pour qu'elle *puisse s'étendre à tout l'espace*, il faut encore qu'il en soit ainsi pour la correspondance entre C_1 et c_1 et la correspondance entre C_2 et c_2. Mais cette condition n'est plus suffisante. L'extension à tout l'espace ne sera, par exemple, pas possible si le coefficient d'enlacement de C_1 et C_2 n'est pas égal au coefficient d'enlacement de c_1 et c_2. Même si ces coefficients sont égaux, il ne sera pas toujours possible de faire cette extension. Voici un exemple où l'on se trouve dans ce cas.

60. Comme courbes c_1, c_2, prenons deux circonférences d'un même plan, extérieures l'une à l'autre. Comme courbe C_1, prenons une circonférence du plan des xy et de centre l'origine O des coordonnées.

Pour définir C_2, marquons un segment FF′ de milieu O, porté par l'axe Oy et intérieur à C_1. Marquons un segment équipollent HH′ ayant son milieu H_1 sur Ox et extérieur à C_1. Construi-

Fig. 13.



sons un rectangle AA′ B′ B ayant ses côtés AA′, BB′ équipollents à FF′, leurs milieux A_1, B_1 étant dans le plan xOz, et ses côtés AB, A′ B′ parallèles à Oz et ayant pour milieux H, H′. Appelons G, G′ les deux arcs de circonférence AFB et A′ F′ B′. Sur le cylindre de révolution d'axe HH′ et de génératrice AA′ traçons les deux

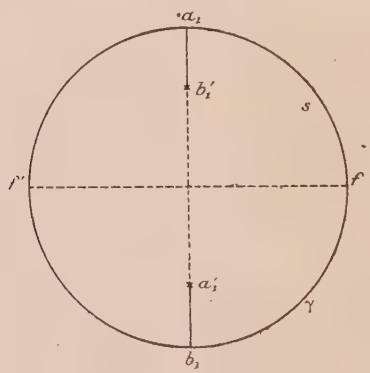
spires d'hélice ne se coupant pas AB, A′ (soit G_1) et BA, B′ (soit G'_1). La courbe C_2 est la réunion des quatre arcs G, G′, G_1, G'_1 (*fig.* 13).

La correspondance entre C_1 et c_1 s'étend à tout l'espace, ainsi que la correspondance entre C_2 et c_2. c_1 et c_2 ne sont pas enlacées. C_1, C_2 ne sont pas non plus enlacées, car C_2 coupe le cercle limité par C_1 aux deux seuls points F, F′ où les traversées sont de sens contraires. Je dis que néanmoins la *correspondance entre le groupe* C_1, C_2 *et le groupe* c_1, c_2 *ne peut pas s'étendre à tout l'espace.*

Retenons les trois propriétés suivantes du groupe c_1, c_2. Le cercle limité par c_1 n'est pas coupé par c_2. Le cercle limité par c_2 n'est pas coupé par c_1. Il existe une sphère contenant c_1 à son intérieur et c_2 à son extérieur. En rapprochant ces propriétés des trois théorèmes démontrés ci-après, nous avons trois preuves de l'impossibilité d'étendre la correspondance considérée à tout l'espace.

Pour démontrer ces théorèmes, j'utiliserai une calotte de sur-

Fig. 14.



face S ayant C_2 pour frontière et comprenant : 1° une surface cylindrique de génératrices parallèles à O*y* et de bases G et G′; 2° deux conoïdes droits d'axe A_1 B_1 et de directrices respectivement G_1 et G'_1. S a une ligne double A_1 B_1. On peut représenter S sur l'intérieur *s* d'une circonférence γ, la ligne double étant représentée par deux segments a_1 b'_1, a'_1 b_1 de part et d'autre du diamètre *ff′* qui représente la génératrice FF′ (*fig.* 14).

61. Théorème I. — *Toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant* C_1 *pour frontière coupe* C_2.

Supposons qu'il existe une telle calotte Σ ne coupant pas C_2. Enfermons Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_2 (n° **33**). Appelons d l'ensemble des points de s représentant des points de S appartenant à D. Je dis que je peux joindre a'_1 et b'_1 à l'intérieur de s par un arc (ligne polygonale) ne touchant pas d. S'il en était autrement, il y aurait dans la frontière (analytique) de d une courbe i ayant ces deux points dans des régions différentes. L'intérieur de i représente alors une calotte de S traversée en un seul point par C_2, et C_2 serait enlacée avec la courbe I que représente i. Ceci est impossible, puisque I appartient à D, non enlacé avec C_2.

Soit alors γ' le chemin joignant $a'_1 b'_1$. Considérons la courbe Γ tracée sur S et représentée par : 1° l'arc $b_1 f a_1$ de γ; 2° l'arc γ' décrit de a'_1 vers b'_1. Cette courbe est fermée et traverse le cercle limité par C_1 en des points sur FF', la somme algébrique des traversées étant 2. Elle est donc enlacée avec C_1. D'autre part, elle est extérieure à D, donc ne coupe pas Σ. Nous arrivons à une contradiction.

62. Théorème II. — *Toute calotte simplement connexe sans point multiple qui a* C_2 *pour frontière coupe* C_1.

Supposons qu'il existe une telle calotte Σ ne coupant pas C_1. Enfermons-la dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1 et soit d l'ensemble des points de s qui représentent des points de S appartenant à D. a'_1 et b'_1 appartiennent à d, car ils représentent des points de C_2, donc de D. Je peux joindre $a'_1 b'_1$ à l'intérieur de s par un chemin γ' appartenant tout entier à d. Sans cela, il y aurait sur S une courbe I appartenant à la frontière de D et qui serait enlacée avec C_2, ce qui est impossible, car une telle courbe ne coupe pas Σ. La courbe Γ envisagée au numéro précédent est enlacée avec C_1. D'autre part, elle est entièrement intérieure à D et ne doit par suite pas être enlacée avec C_1. Nous avons encore une contradiction.

63. Théorème III. — *Soit* Σ *une surface simplement connexe sans point multiple et sans point commun avec* C_1 *et* C_2. *Ces deux courbes sont dans la même région de* Σ.

Enfermons Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1 et C_2 et soit d l'ensemble des points de s qui représentent des points de S appartenant à D. On peut joindre $a'_1 b'_1$ par un chemin γ' ne touchant pas d. Sans cela il y aurait sur S une courbe I appartenant à D et qui serait enlacée avec C_2, ce qui est impossible. La courbe Γ du n° **61** reste extérieure à D, donc ne coupe pas Σ. D'autre part, elle est enlacée (deux fois) avec C_1. Donc C_1 et Γ sont dans la même région de Σ (n° **34**). Il en est alors de même de C_1 et C_2, puisque Γ emprunte un arc de C_2, l'arc G.

64. Les courbes C_1, C_2 jouissent donc des trois propriétés précédentes, qui appartiennent aussi aux courbes enlacées et qu'on aurait pu être tenté de supposer caractéristiques des courbes enlacées. Nous rencontrerons dans la deuxième Partie, une singularité de même nature, mais plus frappante encore : nous définirons une courbe non fermée qui est coupée par toute calotte simplement connexe sans points multiples ayant pour frontière une certaine circonférence. De plus, l'ensemble des points d'intersection n'est pas dénombrable.

Nous verrons aussi, dans la deuxième Partie, de nouveaux exemples de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes, comme ceux définis au n° **54**. Nous définirons aussi deux courbes non fermées dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.

SECONDE PARTIE.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS BORNÉS.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ENSEMBLES FERMÉS DISCONTINUS.

65. *Définitions.* — Considérons un ensemble F de points dans l'espace E_n à n dimensions. On dit que l'ensemble est *mal enchaîné entre deux de ses points* M_1, M_2, s'il existe un nombre η non nul, tel qu'il soit impossible de construire une ligne polygonale ayant pour extrémités ces deux points M_1, M_2, dont tous les sommets sont des points de l'ensemble et dont chaque côté ait une longueur inférieure à η. Nous dirons encore, pour abréger, que ce nombre η est tel qu'il est impossible de *cheminer sur l'ensemble, de* M_1 *à* M_2 *par pas tous inférieurs à* η.

Remarquons que si nous avons déterminé une valeur η satisfaisant à ces conditions, tous les nombres inférieurs à cette valeur y satisfont aussi. De plus, η ne peut pas être pris supérieur à la distance $M_1 M_2$. Donc les valeurs possibles pour η ont une borne supérieure ε ayant les propriétés suivantes : Si $\eta < \varepsilon$, on ne peut pas cheminer sur l'ensemble de M_1 à M_2 par pas tous inférieurs à η. Si $\eta > \varepsilon_F$, on peut cheminer sur l'ensemble de M_1 à M_2 par pas tous inférieurs à η. *C'est ce nombre* ε_F *que j'attacherai désormais au couple* M_1, M_2 *si l'ensemble est positif mal enchaîné entre ces deux points.*

Si M_1, M_2; M'_1, M'_2 sont quatre points de l'ensemble et si les distances $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$ sont inférieures à θ, ou bien $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ et $\varepsilon_F(M'_1, M'_2)$ sont tous deux inférieurs à θ, ou bien ils sont égaux; car on passe de M_1 à M'_1 et de M_2 à M'_2 par des pas inférieurs à θ. Donc si M'_1 et M'_2 tendent vers M_1 et M_2, $\varepsilon_F(M'_1, M'_2)$ tend vers $\varepsilon_F(M_1, M_2)$. $\varepsilon_F(M_1 M_2)$ est une fonction continue des couples de

points M_1, M_2 de l'ensemble; c'est-à-dire des $2n$ coordonnées de ces points.

Un ensemble est dit *partout discontinu*, s'il est mal enchaîné entre deux quelconques de ses points. Nous dirons aussi pour abréger que l'ensemble est discontinu.

Nous allons étudier ceux de ces ensembles qui sont fermés, et surtout ceux qui sont parfaits et partout discontinus.

66. THÉORÈME. — *Soit* F *un ensemble fermé partout discontinu et soient* S_1, S_2 *deux surfaces sans point multiple (variétés fermées à* $n-1$ *dimensions) dont l'une* S_2 *est intérieure à l'autre. On peut construire une surface polygonale* V, *sans point multiple, ayant un nombre fini de sommets, intérieure à* S_1 *et ayant* S_2 *à son intérieur, et ne contenant aucun point de* F.

Ce théorème généralise un énoncé dû à M. Painlevé [1] : Étant donné un point M d'un ensemble, parfait, partout discontinu et plan, on peut enfermer ce point dans une ligne (analytique, par exemple) ne contenant aucun point de l'ensemble et dont tous les points sont à une distance de M inférieure à un nombre donné.

Pour légitimer notre énoncé, considérons tous les couples M_1, M_2 formés d'un point de F situé sur S_1 et d'un point de F situé sur S_2. Ces points forment deux ensembles fermés discontinus F_1 et F_2; si, par hasard, l'un de ces ensembles F_1, par exemple, n'existait pas, nous adjoindrions à F un point P de S_1, alors F_1 existerait et se réduirait à P. Les ensembles F_1 et F_2 étant fermés, la fonction $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ atteint sa borne inférieure θ_1 pour un couple M_1, M_2 convenablement choisi et par suite θ_1 est différent de zéro.

Adjoignons à F tous les points de S_1 et de S_2 et considérons, pour l'ensemble $\mathcal{F}$ ainsi obtenu, la fonction $\varepsilon_{\mathcal{F}}(M_1, M_2)$, M_1 étant sur S_1 et M_2 sur S_2. Cette fonction atteint encore sa borne inférieure θ. Je dis que θ *est différent de zéro.*

Sans quoi, si petit que soit $\eta > 0$, on pourrait aller d'un point M_1 de S_1 à un point M_2 de S_2 par pas inférieurs à η en ne rencon-

[1] *Voir* la Thèse de M. ZORETTI (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I, 1905, p. 9.

trant que des points de $\mathcal{F}$. Soient m_1 le dernier point de S_1 rencontré, m_2 le premier point de S_2 rencontré, p_1 et p_2 les points rencontrés respectivement, immédiatement après m_1, immédiatement avant m_2. p_1 et p_2 sont des points de F, $\varepsilon_F(p_1, p_2)$ est au plus égal à η. Donnons à η des valeurs décroissant jusqu'à zéro; de cette suite de valeurs de η, on pourra toujours extraire une suite partielle telle que les points p_1 et p_2 correspondants tendent respectivement vers deux positions limites, m_1 et m_2 : ces points limites des points p_1 et p_2 de F appartiennent à F; m_1 est sur S_1, m_2 est sur S_2, car p_1 et p_2 étaient distants de moins de η l'un de S_1, l'autre de S_2. Et puisque $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ est une fonction continue, on aurait

$$\varepsilon_F(m_1, m_2) = 0;$$

ce qui est contradictoire, puisqu'on a nécessairement

$$\varepsilon_F(m_1, m_2) \geq \theta_1 > 0.$$

67. Pavons l'espace à l'aide de cubes égaux de diamètre d, inférieur à $\frac{1}{2}\theta$. Et considérons les domaines formés par ceux de ces cubes qui contiennent, à leur intérieur ou sur leur frontière, un point de $\mathcal{F}$. Deux points P, Q de $\mathcal{F}$ situés dans un même domaine sont deux points pour lesquels $\varepsilon_{\mathcal{F}}(P, Q)$ est au plus égal à $2d < \theta$; donc tous les points de S_2 sont dans un même domaine D qui ne contient aucun point de S_1. Tous les points de D pouvant être joints à S_2 sans sortir de D, donc sans rencontrer S_1, tous ces points sont intérieurs à S_1 et les différentes surfaces polygonales limitant D sont intérieures à S_1. Elles divisent l'espace en régions dont une seule est non bornée et celle-ci est limitée par une seule des surfaces frontières de D, soit V.

V répond à la question, elle est intérieure à S_1, elle contient S_2 à son intérieur, elle ne passe par aucun point de F. Il est vrai que V peut avoir des points singuliers parce que deux cubes peuvent avoir en commun, sur V, un sommet, une arête, ..., une frontière à $n - 2$ dimensions; mais alors, il n'y a pas de points de F sur cette frontière ni dans un certain voisinage de cette frontière et, sans sortir de ce voisinage, on peut modifier V, en augmentant ou diminuant D, de façon à faire disparaître les singularités.

68. Théorème. — *Soit un ensemble fermé partout discontinu borné* F *et un nombre* Δ. *On peut enfermer* F *dans un nombre fini de surfaces polygonales, ne touchant pas* F *et dont chacune a un diamètre inférieur à* Δ.

Pavons l'espace à l'aide de cubes égaux et ayant un diamètre inférieur à Δ. Envisageons ceux de ces cubes qui touchent F et soit S_2 la frontière de l'un d'eux. Entourons S_2 par une surface S_1 ayant encore un diamètre inférieur à Δ (une frontière de cube, par exemple). Construisons la variété V intermédiaire entre S_1 et S_2, définie par le théorème précédent. Faisons de même pour chacun des cubes conservés, cubes qui sont en nombre fini puisque F est borné.

Toutes les surfaces ainsi construites, qui se coupent, partagent l'espace en cellules et tout point de F est intérieur à une de ces cellules et une seule. Chacune de ces cellules est d'ailleurs une portion de l'intérieur d'une des surfaces V construites, donc a un diamètre inférieur à Δ.

Considérons une de ces cellules qui contient une portion de F; soient F′ cette portion de F et V′ la frontière de la cellule. V′ a un écart non nul avec F′. Pavons l'espace à l'aide de cubes ayant un diamètre inférieur à cet écart et conservons ceux qui touchent V′. Ils forment un domaine d'un seul tenant auquel F′ est extérieur. Les frontières des régions extérieures à ce domaine et contenant des points de F′ peuvent être rendues sans point multiple et sans point commun, comme il a été fait pour V au numéro précédent. Elles constituent une partie des surfaces cherchées. En faisant la même opération pour chacune des cellules qui contient des points de F, j'aurai toutes les surfaces cherchées.

69. Ce théorème va nous permettre d'attacher à l'ensemble F une infinité dénombrable de surfaces polygonales V telles *que* F *coïncide avec l'ensemble des points qui sont intérieurs à une infinité des surfaces* V.

Donnons-nous arbitrairement un nombre Δ_1 et enfermons F dans un nombre fini de surfaces polygonales ayant chacune un diamètre

inférieur à Δ_1 (n° **68**). Nous appellerons ces surfaces polygonales, les *surfaces d'ordre* 1. A l'intérieur de chacune d'elles, il y a une portion de F qui est, comme F, un ensemble fermé partout discontinu. Il peut d'ailleurs arriver que certains de ces ensembles partiels se réduisent à un point. Envisageons d'abord ceux de ces ensembles partiels qui ont au moins deux points, et soit Δ_2 un nombre inférieur au diamètre de chacun d'eux et à la moitié de Δ_1. Enfermons chacun de ces ensembles partiels dans un nombre fini de surfaces polygonales ayant un diamètre inférieur à Δ_2 et totalement intérieures à la surface d'ordre 1 qui le contient. D'après la première condition imposée à Δ_2, nous aurons ainsi au moins deux variétés pour chacun des ensembles partiels envisagés. Quant aux ensembles partiels réduits à un point, nous enfermerons chacun d'eux dans une surface polygonale de diamètre inférieur à Δ_2 et intérieure à la surface d'ordre 1 qui le contient. Les surfaces ainsi définies constituent *les surfaces d'ordre* 2.

A partir de ces surfaces d'ordre 2, nous construirons des surfaces d'ordre 3, comme nous avons construit les surfaces d'ordre 2 à partir des surfaces d'ordre 1; nous continuerons indéfiniment. L'infinité dénombrable de surfaces ainsi construites se répartissent en surfaces d'ordre 1, 2, 3, ..., λ, ... et ont les propriétés suivantes :

a. Quel que soit λ, *les surfaces d'ordre* λ *sont en nombre fini et extérieures les unes aux autres ;*

b. A l'intérieur de chaque surface d'ordre λ, *il y a au moins une surface d'ordre* $\lambda + 1$, *et chaque surface d'ordre* $\lambda + 1$ *est intérieure à une surface d'ordre* λ ;

c. Le diamètre maximum Δ_λ *des surfaces d'ordre* λ *tend vers zéro quand* λ *augmente indéfiniment.*

(Cette dernière propriété provient de la seconde condition imposée à Δ_2, $\Delta_2 < \frac{1}{2}\Delta_1$.)

Je dis que F *coïncide avec l'ensemble des points qui sont intérieurs à une infinité des surfaces ainsi définies.* Tout d'abord, chaque point de F est intérieur à une infinité de ces surfaces, car il est

intérieur à une surface (et d'ailleurs une seule) de chacun des ordres. Soit maintenant M un point intérieur à une infinité des surfaces V; montrons qu'il appartient à F. Étant donné λ' quelconque, il y a un nombre $\lambda > \lambda'$ tel que M soit intérieur à une surface d'ordre λ, puisque le nombre des surfaces d'ordre au plus égal à λ' est fini. M est donc intérieur à une surface et une seule de chacun des ordres. Soient V_1, V_2, V_3, ..., V_λ, ... ces surfaces. Chacune d'elles contient au moins un point de F : soient M_1, M_2 M_3, ..., M_λ, ... des points distincts, ou confondus, respectivement intérieurs à V_1, V_2, V_3, ..., V_λ, ...; M et M_λ étant intérieurs à V_λ, on a $MM_\lambda < \Delta_\lambda$. Or Δ_λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Par suite, M appartient à F, puisque F est fermé.

La proposition est démontrée.

70. Réciproquement : *Soit une infinité dénombrable de surfaces* V (*polygonales ou non*) *satisfaisant aux trois conditions* (*a*, *b*, *c*) *du numéro précédent. Je dis que l'ensemble* F *des points intérieurs à une infinité de ces surfaces est un ensemble fermé partout discontinu.*

Dans cet énoncé, ainsi que dans les conditions *a*, *b*, *c*, les mots intérieur et extérieur doivent être entendus au sens strict.

A chacune des surfaces V attachons un point M′ intérieur à cette surface ou situé sur elle et soit F′ l'ensemble de ces points M′, supposés tous différents [1], ce qui est manifestement réalisable. *Je dis que* F *est le dérivé de l'ensemble* F′. Montrons d'abord que tout point M appartenant au dérivé de F′ appartient à F, c'est-à-dire est intérieur à une infinité des surfaces V, ou, ce qui revient au même, est intérieur à une surface V d'ordre λ, quel que soit λ. M appartenant au dérivé de F′ a, dans son voisinage, une infinité de points M′. Mais les points M′ relatifs aux surfaces V d'ordre au plus égal à λ sont en nombre fini. Donc M a dans son voisinage une infinité de points M′ relatifs aux surfaces dont l'ordre est supérieur à λ; il appartient donc au dérivé de l'ensemble F_1' des

[1] Si l'on ne prenait pas les points tous différents, il faudrait, comme toujours en pareil cas, convenir qu'un point P qui correspond à une infinité de surfaces est considéré comme appartenant au dérivé de F′.

points M′ fournis par les surfaces d'ordre supérieur à λ. Mais, par construction et en vertu de la propriété *b*, F'_1 est intérieur à l'ensemble des surfaces d'ordre $\lambda + 1$. Ces surfaces sont elles-mêmes intérieures à l'ensemble des surfaces d'ordre λ et ont avec elles un écart non nul ε. Le dérivé de F'_1 (et par suite M) est donc intérieur à l'ensemble des surfaces d'ordre λ et tout point de ce dérivé a un écart au moins égal à ε avec ces surfaces. Donc M est intérieur (au sens strict) à une des surfaces d'ordre λ.

Inversement, tout point M intérieur à une infinité de surfaces V appartient au dérivé de F′.

En effet, M est, quel que soit F, intérieur à une surface V d'ordre supérieur à λ, donc est à une distance inférieure à Δ_λ du point M′ correspondant. Et puisque Δ_λ tend vers zéro avec $\frac{1}{\lambda}$, M est limite de points M′. F est donc bien le dérivé de F′. Par suite, F est *fermé*.

Remarquons qu'un point M de F définit une suite de surfaces V auxquelles il est intérieur, et qu'inversement, toute suite de surfaces V des ordres 1, 2, 3, ... emboîtées les unes dans les autres définit un point de F. Nous établissons ainsi une *correspondance biunivoque entre les suites du type considéré* (S) *et les points de* F.

Chaque surface V peut être introduite dans une suite S. *Donc il y a des points de* F *à l'intérieur de chaque surface* V. De plus, chaque point de F est intérieur à une surface V d'ordre λ; donc, quel que soit λ, *tout* F *est enfermé dans l'ensemble des surfaces* V *d'ordre* λ.

Montrons maintenant que F est *partout discontinu*. Pour cela, considérons deux points M, M′ de F. On peut déterminer un ordre λ assez élevé pour que Δ_λ soit inférieur à la distance MM′. M et M′ sont alors intérieurs à deux surfaces distinctes V, V′ d'ordre λ. Or tout F est contenu dans l'ensemble des surfaces d'ordre λ et ces surfaces sont extérieures les unes aux autres et ont un écart mutuel non nul η. On ne pourra donc pas cheminer sur F, de M à M′, par pas inférieurs à η. F est partout discontinu.

71. L'ensemble des points intérieurs à une infinité des surfaces V qui satisfont aux conditions *a*, *b*, *c* du n° **69** est donc un

ensemble fermé partout discontinu et, inversement, tout ensemble fermé partout discontinu borné peut être défini de cette façon. Nous appellerons *surfaces de définition* d'un ensemble fermé discontinu, les surfaces V qui lui donnent naissance par ce procédé. Ces surfaces peuvent être choisies polygonales, chacune ayant un nombre fini de sommets.

Dans le cas des ensembles plans, ces surfaces deviennent des courbes sans point multiple et sans point commun. On peut prendre comme courbes des lignes polygonales et nous dirons qu'elles constituent les *polygones de définition* de l'ensemble.

Enfin, pour un ensemble de l'espace à une dimension (ensemble situé sur une droite), chaque surface devient les deux extrémités d'un intervalle. Nous dirons que ces intervalles sont les *intervalles de définition* de l'ensemble.

Le procédé indiqué peut d'ailleurs servir à définir un ensemble fermé borné quelconque. Il suffit de considérer les mots *extérieur* et *intérieur* au sens large, au lieu de les prendre au sens strict.

72. Comme première application de ces propriétés, démontrons que *tout ensemble fermé, partout discontinu, borné est situé sur un arc de Jordan sans point multiple.*

Soit F un tel ensemble de l'espace à n dimensions. Nous le supposerons donné au moyen de ses surfaces polygonales de définition V. Nous désignerons toutes ces surfaces par la même lettre V affectée d'un indice inférieur désignant son ordre, et, s'il y a lieu, d'un indice supérieur distinguant les surfaces d'un même ordre. Nous supposerons, comme nous pouvons toujours le faire, qu'il y a une seule surface d'ordre 1.

Sur chaque surface V marquons deux points A et B que nous affecterons des mêmes indices que cette surface V. Nous construirons l'arc de Jordan de la façon suivante. Soit V_λ une des surfaces V. Supposons qu'elle contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$ que nous désignerons par les indices supérieurs $1, 2, \ldots, \varkappa$. Joignons les points A_λ, $A^1_{\lambda+1}$; $B^1_{\lambda+1}$, $A^2_{\lambda+1}$; $B^2_{\lambda+1}$, $A^3_{\lambda+1}$, $\ldots$, $B^{\varkappa-1}_{\lambda+1}$, $A^{\varkappa}_{\lambda+1}$; $B^{\varkappa}_{\lambda+1}$, B_λ; respectivement, par des lignes polygonales ne se coupant pas, sans point multiple, chacune de ces lignes étant, sauf ses extré-

mités, intérieure à V_λ et extérieure aux surfaces $V_{\lambda+1}$ considérées. Il est possible de construire ces lignes, même dans le cas de l'espace à deux dimensions (1), car il faut, dans ce cas, la totalité de ces lignes pour partager en régions la portion du plan intérieure à V_λ et extérieure aux $V_{\lambda+1}$. Les surfaces V ayant chacune un nombre fini de sommets, je peux aussi imposer aux lignes construites la condition d'avoir chacune un nombre fini de sommets. Ajoutons à toutes les lignes construites l'ensemble F. Je dis que l'ensemble L ainsi obtenu est un arc de Jordan sans point multiple, qui contiendra naturellement F par sa définition même.

Pour le prouver, considérons, sur l'axe des t, le segment (0, 1) que j'appelle l et montrons que l'on peut considérer L comme une image biunivoque et continue de l.

Aux deux points A_1, B_1, pris sur la seule surface d'ordre 1, je fais correspondre les deux extrémités a_1, b_1 de l. Supposons connus les points a_λ, b_λ correspondant aux points A_λ, B_λ d'une même surface V_λ et supposons que cette surface contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$. Partageons le segment $a_\lambda b_\lambda$ en $2\varkappa + 1$ parties égales par des points que je note $a^1_{\lambda+1} + 1$, $b^1_{\lambda+1}$, $a^2_{\lambda+1}$, $b^2_{\lambda+1}$, ..., $a^\varkappa_{\lambda+1}$, $b^\varkappa_{\lambda+1}$, l'abscisse de l'un de ces points étant supposée inférieure à celles des points qui le suivent. La correspondance entre les A, B et les a, b résulte de leur notation.

Prenons maintenant une des lignes polygonales construites, $A^1_{\lambda+1}B^1_{\lambda+1}$, je lui fais correspondre le segment de l limité par les points homologues, la correspondance conservant la similitude des segments homologues. Jusqu'ici la correspondance est manifestement biunivoque et continue.

Pour définir les homologues des points de F, remarquons que les points a, b de mêmes indices sont extrémités d'un intervalle ρ, que j'affecte des mêmes indices, et que ces intervalles remplissent les conditions voulues pour définir un ensemble fermé partout discontinu f. D'ailleurs les intervalles ρ ont la même disposition relative que les surfaces V de mêmes indices. Soit alors M un point de F; il est intérieur à toutes les surfaces V d'une suite du type (S)

(1) Je n'envisage naturellement pas le cas où F serait sur une droite.

(n° **70**). A cette suite (S) correspond une suite d'intervalles ρ définissant un point m et un seul de f que je ferai correspondre à M. La correspondance ainsi réalisée entre F et f est biunivoque et, ajoutée aux correspondances précédentes, elle donne une correspondance biunivoque entre L et l.

Il reste à prouver que cette correspondance est continue. Ceci a lieu pour les points n'appartenant pas à F et à f. Montrons-le pour les points de ces ensembles. Soient M, m deux points homologues sur F et f et M', m' deux points homologues quelconques de L et l. Il faut prouver que, étant donné H, on peut lui faire correspondre h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$. Or je peux déterminer un nombre λ assez grand pour que la surface d'ordre λ qui contient M ait un diamètre inférieur à H. Soient A, B les deux points qui ont été pris sur cette surface. Soient a, b leurs homologues sur l. m est intérieur à ab et l'homologue du segment ab est intérieur à la surface considérée et par suite la distance de chacun d'eux à M est inférieure à H. Il suffit donc de prendre h inférieur à la distance de m à a et à b pour réaliser les conditions voulues.

L est donc bien l'arc de Jordan cherché.

73. *Cas des ensembles parfaits partout discontinus.* — Les résultats qui précèdent s'appliquent évidemment aux ensembles parfaits partout discontinus bornés. On peut cependant imposer des conditions plus particulières aux surfaces de définition de ces ensembles.

Soit P un ensemble parfait discontinu. Reprenons sur cet ensemble les raisonnements du n° **69**. Supposons P enfermé dans un nombre fini de surfaces d'ordre λ. Soit P' la partie de P intérieure à l'une de ces surfaces. P' est maintenant un ensemble parfait, qui, par suite, a un diamètre non nul. Dans la construction des surfaces d'ordre $\lambda + 1$, on pourra donc faire en sorte qu'il y ait au moins deux surfaces intérieures à la surface d'ordre λ envisagée. Ainsi, on peut remplacer la condition b par la suivante :

b'. *A l'intérieur de chaque surface d'ordre* λ, *il y a au moins deux*

surfaces d'ordre $\lambda + 1$ *et chaque surface d'ordre* $\lambda + 1$ *est intérieure à une surface d'ordre* λ.

Réciproquement, considérons une infinité dénombrable de surfaces V *satisfaisant aux conditions a, b', c; je dis que l'ensemble des points intérieurs à une infinité des surfaces* V *est un ensemble parfait partout discontinu.*

L'ensemble défini par ces surfaces est fermé partout discontinu (n° **70**). Il suffit donc de prouver que chacun de ses points est point limite pour l'ensemble. Soit M un tel point. Il faut montrer que, quel que soit ε, il existe un autre point M' de l'ensemble tel que $MM' < \varepsilon$. Or nous pouvons déterminer un nombre λ tel que les surfaces d'ordre λ aient un diamètre inférieur à ε. Soit V celle de ces surfaces qui contient M. A l'intérieur de V, il y a au moins deux surfaces d'ordre $\lambda + 1$. L'une d'elles contient M. Les autres contiennent des points de P autres que M. Ces points étant intérieurs à V, la distance de chacun d'eux à M est inférieure à ε.

C. Q. F. D.

74. *Il résulte de ceci que deux ensembles parfaits partout discontinus bornés quelconques sont homéomorphes.* Il nous suffit de prouver qu'un tel ensemble P est homéomorphe à un ensemble particulier *p*. Comme ensemble *p* nous prendrons l'ensemble obtenu sur l'axe des *t* en enlevant du segment (0, 1), le tiers moyen (extrémités non comprises), puis de chacun des deux segments restant le tiers moyen et ainsi de suite indéfiniment. Rangeons dès maintenant les intervalles contigus à *p*; nous les supposerons classés par ordre de grandeur décroissante, ceux qui ont même longueur étant rangés par abscisses croissantes.

Nous supposerons P donné par ses surfaces de définition V satisfaisant aux trois conditions *a*, *b'*, *c*. Nous allons chercher à définir *p* par des intervalles ρ satisfaisant à ces mêmes conditions. Nous établirons en même temps une correspondance biunivoque entre les surfaces V et les intervalles ρ, faisant correspondre des intervalles et des surfaces de même ordre.

Nous pouvons supposer qu'il y a une seule surface d'ordre 1. Nous lui ferons correspondre, comme intervalle d'ordre 1, un inter-

valle un peu plus grand que l'intervalle (0, 1). Supposons les correspondances établies jusqu'à l'ordre λ inclusivement. Soit V_λ une surface particulière d'ordre λ et supposons qu'elle contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$, $V^1_{\lambda+1}$, $V^2_{\lambda+1}$, ..., $V^x_{\lambda+1}$ $(x \geq 2)$. Soient a_λ et b_λ les extrémités de l'intervalle ρ_λ correspondant à V_λ. Dans la suite des intervalles contigus à p, rangés comme il a été dit, considérons les $\varkappa - 1$ premiers qui soient totalement intérieurs à a_λ, b_λ. En dehors de ces intervalles contigus et de ceux qui contiennent a_λ et b_λ, il y a, sur $a_\lambda b_\lambda$, $\varkappa$ segments qui contiennent tous les points de p sur ρ_λ. Enfermons ces $\varkappa$ segments dans $\varkappa$ intervalles intérieurs à ρ_λ et n'empiétant pas les uns sur les autres. Ces intervalles constitueront les $\varkappa$ intervalles $\rho_{\lambda+1}$ que je ferai correspondre par une loi arbitraire, mais de façon biunivoque, aux $\varkappa$ surfaces $V_{\lambda+1}$. Pour la construction de ces intervalles $\rho_{\lambda+1}$, il y aura lieu de prendre une précaution facile, si l'on veut, comme nous en aurons besoin, que la longueur maxima δ_λ des segments d'ordre λ tende vers zéro, quand λ augmente indéfiniment. Il suffira que les extrémités de ρ_λ et du segment qu'il enferme aient un écart assez petit, cet écart tendant vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

Ceci étant, les intervalles ρ que nous avons définis remplissent les trois conditions a, b', c et définissent par suite un ensemble parfait partout discontinu qui n'est autre que p. En effet, tout point de p est intérieur à une infinité des intervalles ρ; tout point intérieur à une infinité des intervalles ρ est, soit une extrémité d'intervalle contigu à p, soit un point limite d'une infinité de telles extrémités, donc appartient à p. La correspondance entre les surfaces V et les intervalles ρ est biunivoque, et les intervalles ont même disposition relative que les surfaces qui leur correspondent. Soit alors M un point de P. Il est intérieur à toutes les surfaces V d'une suite unique du type (S) (n° **70**). Aux surfaces de cette suite, correspondent des intervalles définissant un point unique m de p que je ferai correspondre à M. Cette correspondance s'étend à tout P et tout p, et est *biunivoque*.

Il reste à prouver qu'elle est *continue*, c'est-à-dire que, M et m étant deux points homologues particuliers, M′ et m', deux points homologues quelconques :

1° Étant donné H, on peut déterminer h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$;

2° Étant donné h, on peut déterminer H tel que $MM' < H$ entraîne $mm' < h$.

H étant donné, je peux déterminer λ de façon que le diamètre des surfaces d'ordre λ soit inférieur à H. Soient V la surface d'ordre λ qui contient M et φ l'intervalle correspondant. φ contient m, et tous les points de p intérieurs à φ ont leurs homologues à l'intérieur de V. Il suffit donc de prendre h inférieur à la distance de m aux extrémités de φ pour être assuré que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$.

La seconde condition se réalise de façon analogue en intervertissant les rôles de P et p. Cette réalisation est possible, puisque la longueur maxima δ_λ des intervalles φ d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

P et p sont donc homéomorphes (1).

CHAPITRE II.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS PLANS.

75. Les ensembles parfaits, partout discontinus, bornés, plans, sont, au point de vue du problème qui nous occupe, dans le premier des trois cas possibles : *leur correspondance peut s'étendre à la totalité de leurs plans.* Il nous suffira de faire la démonstration dans le cas où l'un des ensembles est un ensemble particulier.

Soient alors P un ensemble, parfait discontinu, borné, quelconque, du plan E, et p l'ensemble utilisé au n° **74**. La démonstration faite à ce numéro a prouvé que P et p sont homéomorphes. Je me propose d'étendre cette correspondance à la totalité de E et de e.

Nous supposerons P donné par ses polygones de définition V. Nous supposerons encore qu'il y a un seul polygone d'ordre 1. La démonstration du n° **74** a fait correspondre à ces polygones des intervalles de définition de p. Nous en déduisons immédiatement

(1) Ce résultat, ainsi que celui du n° **72**, ont été, comme je l'ai déjà dit, énoncés par M. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. **149**, 1909, p. 1048, et t. **151**, 1910, p. 138.

des polygones de définition de p : il suffit de remplacer chaque intervalle par le carré dont il est la diagonale. Nous appellerons φ ces carrés. La correspondance entre les carrés φ et les polygones V résulte de la correspondance établie au n° **74** entre les V et les intervalles de définition de p. Cette correspondance entraîne aussi l'homéomorphie de P et p comme il a été dit au n° **74**.

Soient alors V et φ un polygone et un carré se correspondant. Si leurs contours n'ont pas le même nombre de sommets, je marquerai sur l'un de ces contours un certain nombre de points que j'appellerai *sommets*, de façon à égaliser ces nombres. J'établis alors entre ces contours une correspondance continue, les faisant correspondre sommet à sommet, côté à côté, la correspondance entre côtés étant une similitude. Je fais en outre en sorte que les sens de description des deux contours soient concordants.

La correspondance entre les contours ainsi établie, soient V un polygone d'ordre λ et φ son homologue. Supposons que V contienne à son intérieur $\varkappa$ polygones d'ordre $\lambda + 1$; φ contiendra à son intérieur les $\varkappa$ carrés homologues. La correspondance établie entre les contours s'étend à la région annulaire qu'ils limitent (n° **22**). L'extension se fait de même pour les extérieurs du polygone et du carré d'ordre 1. Ajoutons enfin à ces correspondances la correspondance entre P et p. J'obtiens ainsi une *correspondance biunivoque de tout* E *et tout* e. Tout point de l'un des plans n'appartenant pas à l'ensemble discontinu a, en effet, avec cet ensemble un écart non nul. Il est alors extérieur aux polygones de l'ordre λ assez élevé pour que le diamètre des polygones de cet ordre soit inférieur à cet écart. Il entre donc dans une des correspondances envisagées.

Il reste à prouver que la correspondance est *continue*. Ceci a manifestement lieu en dehors de P et p. Soient alors M, m deux points homologues particuliers de P et p, et M′, m' deux points homologues quelconques de E et e. Il faut montrer que :

1° Étant donné H, on peut déterminer h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$;

2° Étant donné h, on peut déterminer H tel que $MM' < H$ entraîne $mm' < h$.

H étant donné, soit λ un ordre assez grand pour que Δ_λ, maximum du diamètre des polygones d'ordre λ, soit inférieur à H et soit V le polygone de cet ordre qui contient M. Son homologue φ contient m et tous les points intérieurs à φ ont leurs homologues dans V. Il suffit alors de prendre h inférieur à l'écart non nul de m avec le contour de φ.

La deuxième partie se démontre de la même façon.

La proposition est établie.

76. Comme application, démontrons la propriété suivante : *Soient, dans un plan* E, *deux ensembles parfaits partout discontinus, bornés*, P, P′ *sans point commun. On peut passer de* P *à* P′ *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant qu'une région bornée.* Au cours de cette déformation, les divers points de P décriront des arcs de Jordan sans point multiple et sans point commun, dont l'extrémité seule appartient à P′.

Les deux ensembles, étant parfaits et sans point commun, ont un écart non nul ε. Supposons que chacun d'eux soit donné par ses polygones de définition V, V′. Nous pouvons déterminer un ordre λ assez grand pour que les polygones V et V′ de cet ordre aient un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Les polygones V et V′ de cet ordre n'empiètent pas les uns sur les autres. Je peux les considérer comme étant les polygones d'ordre 1 de l'ensemble parfait discontinu P + P′.

Soit alors, dans un plan e, l'ensemble p porté par l'axe Ox, p étant toujours l'ensemble particulier déjà défini. Considérons un deuxième ensemble p' déduit de p par une translation parallèle à l'axe des y. Je supposerai ces ensembles définis par leurs carrés de définition, choisis de façon à établir l'homéomorphie de P et p d'une part, P′ et p' d'autre part. Je supposerai d'ailleurs p et p' assez écartés pour que les carrés d'ordre λ de p et p' ne se touchent pas. Au moyen des polygones V, V′ et des carrés φ, φ' d'ordre au moins égal à λ, la correspondance entre P et p et celle entre P′ et p' s'étendent à la totalité de E et de e. Les raisonnements sont analogues à ceux du numéro précédent.

Il suffit alors de prouver sur p et p' la proposition que je veux établir. Or, dans e, la possibilité de la déformation est manifeste. Il suffira que, dans cette déformation, chaque point de p décrive un segment parallèle à l'axe Oy. On pourrait d'ailleurs, au lieu des ensembles p et p' considérés, prendre deux ensembles homothétiques sur deux arcs de cercle homothétiques et concentriques et appliquer à ces ensembles la déformation indiquée au n° **26**.

77. Disons enfin un mot de la correspondance entre ensembles situés sur une droite. Soient P un ensemble parfait, partout discontinu, borné, situé sur une droite E (axe des T) et p un autre ensemble situé sur une droite e (axe des t). *Il y a des correspondances entre* P *et* p *qui s'étendent à la totalité de* E *et* e. Nous supposerons toujours que p est l'ensemble particulier déjà envisagé et que P est donné par ses intervalles de définition V.

Pour mettre en évidence la propriété que j'énonce, il suffira de prendre une précaution dans la détermination des intervalles de définition de p. Soient A, B les extrémités d'un intervalle V d'ordre λ de P contenant à son intérieur $\varkappa$ intervalles d'ordre $\lambda + 1$ et soit ab l'intervalle v correspondant de p. Les $\varkappa$ intervalles d'ordre $\lambda + 1$ que contient v sont déterminés, mais la manière dont on les fait correspondre à ceux contenus dans V est arbitraire. Je choisirai cette correspondance de manière qu'en décrivant AB d'une part, ab d'autre part, les intervalles correspondants se présentent dans le même ordre. Je fais alors correspondre les extrémités de ces intervalles dans l'ordre où elles se présentent. E et e sont alors découpés en tronçons. Si un tronçon de E, ne contenant pas de points de P, est limité par deux points A, B, les deux points homologues a, b limitent sur e un tronçon ne contenant pas de points de p. Je ferai correspondre ces tronçons par similitude. J'ajoute à ces correspondances la correspondance entre P et p résultant de la construction des intervalles de définition de p et aussi une correspondance entre les extérieurs de l'intervalle d'ordre 1 de P et de l'intervalle d'ordre 1 de p. J'obtiens ainsi la correspondance cherchée entre E et e. Dans cette correspondance, les points homologues de P et de p se présentent dans le même ordre sur E et e.

Ceci s'étend immédiatement aux ensembles parfaits discontinus situés sur des courbes de Jordan sans point multiple d'un espace quelconque. Soient P et p deux ensembles parfaits discontinus situés respectivement sur des arcs de Jordan sans point multiple Γ et γ, les extrémités de ces arcs n'appartenant pas aux ensembles. Supposons que les coordonnées d'un point de Γ s'expriment en fonctions continues d'un paramètre T variant de 0 à 1. Faisons correspondre aux points de Γ les points de l'axe des T dont l'abscisse est leur paramètre. A Γ correspond un segment de droite Γ' et à P un ensemble parfait partout discontinu P' situé sur Γ'. Faisons de même pour p : à γ correspond un segment de droite γ' et à p un ensemble parfait discontinu p' sur γ'. Or, on peut étendre à la totalité de Γ' et de γ' une certaine correspondance entre P' et p' et il en résulte l'extension à la totalité de tout Γ et de tout γ d'une certaine correspondance entre P et p. (Ceci ne s'applique naturellement pas à une correspondance quelconque entre P et p.)

La même propriété a évidemment lieu si Γ et γ sont des courbes fermées. Elle a aussi lieu, dans le cas des courbes ouvertes, si certaines extrémités de ces courbes appartiennent aux ensembles sous la réserve que, si un point de P est extrémité de Γ, le point correspondant de p soit aussi extrémité de γ.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

78. Les résultats ne sont plus aussi simples pour l'espace à trois dimensions. La correspondance entre deux ensembles parfaits, partout discontinus, bornés, gauches, peut, soit s'étendre à tout l'espace, soit s'étendre aux voisinages de ces ensembles, soit ne s'étendre à aucun voisinage. Nous allons donner des exemples de ces deux derniers cas. Ils résulteront des propriétés d'un ensemble particulier, que je désignerai par P et que je vais définir.

P est donné par ses *surfaces de définition* (n° **75**). Toutes ces sur-

faces sont des *tores*, que je désignerai par T. Je suppose qu'il existe un seul tore d'ordre 1. Si je considère un tore quelconque d'un ordre quelconque λ, je suppose qu'il contient à son intérieur k tores d'ordre $\lambda + 1$ et que ces *tores sont enlacés comme les anneaux d'une chaîne fermée entourant l'axe du tore* d'ordre λ considéré.

Précisons ces définitions. Je dis que *deux tores sont enlacés*, si, étant extérieurs l'un à l'autre, un parallèle de l'un est enlacé avec un parallèle de l'autre. Il en sera de même pour deux parallèles quelconques pris un sur chacun de ces tores, et aussi pour toute courbe se déduisant d'un parallèle sans sortir du tore envisagé. En particulier, si deux tores sont enlacés, les lieux des centres de leurs méridiens sont enlacés. Pour simplifier le langage, j'appellerai *circonférence d'ordre λ, intérieure à un tore d'ordre λ, le lieu des centres des méridiens de ce tore.* Je désignerai ces circonférences par la lettre C.

Numérotons de 1 à k les k tores d'ordre $\lambda + 1$ intérieurs à un tore d'ordre λ. Je supposerai que deux tores ayant des numéros consécutifs, ainsi que les tores k et 1, sont enlacés, alors que deux tores non consécutifs ne sont pas enlacés. Je suppose enfin que les centres de ces k tores sont sur la circonférence d'ordre λ et qu'en joignant ces points dans l'ordre de leurs numéros, on forme un polygone régulier non étoilé. Ces conditions sont possibles à réaliser. Il suffit pour cela que le rayon du méridien d'un tore T soit assez petit, par rapport au rayon de la circonférence C de ce tore, et que k soit assez grand. On peut alors prendre pour tores d'ordre $\lambda + 1$ des tores semblables au tore d'ordre λ. La possibilité de la construction a alors lieu quel que soit λ, k étant fixe. Pour simplifier quelques raisonnements ultérieurs, je *supposerai que ce nombre k est pair.*

Enfin le diamètre d'un tore d'ordre $\lambda + 1$ est inférieur à la moitié du diamètre du tore d'ordre λ qui le contient. Donc le diamètre maximum des tores d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Les tores T satisfont donc aux trois conditions a, b', c (n° **73**); ils définissent donc bien un ensemble parfait partout discontinu P, qui est l'ensemble des points intérieurs à une infinité des tores T.

79. THÉORÈME. — *L'ensemble* P *qui vient d'être défini et tout ensemble parfait, discontinu, p situé sur une droite sont homéomorphes seulement en eux-mêmes.*

Supposons qu'il existe une correspondance entre P et p qui puisse s'étendre à leurs voisinages. Soient M et m deux points homologues de P et p. m est centre d'une sphère s dont tout l'intérieur appartient au voisinage en question de p. Il y a d'ailleurs dans s une infinité de points de p, p étant parfait. Soient alors a et b deux points de la droite portant p, intérieurs à s, n'appartenant pas à p, tels que m soit entre a et b et qu'il y ait dans s des points de p extérieurs à l'intervalle ab. La sphère σ de diamètre ab ne contient alors aucun point de p sur sa surface, elle est intérieure à s, m est à son intérieur et il y a dans l'intérieur de s des points de p extérieurs à σ.

σ étant intérieure à s, il lui correspond dans l'espace de P une *surface simplement connexe sans point multiple* Σ ne passant par aucun point de P ayant des points de P dans chacune de ses régions. Pour démontrer le théorème, il me suffit alors de prouver que ceci est impossible. C'est ce qui résulte du théorème suivant.

80. THÉORÈME. — *Toute surface simplement connexe sans point multiple* Σ *qui a des points de* P *dans chacune de ses régions coupe* P.

Supposons qu'il existe une surface simplement connexe sans point multiple Σ, ayant des points de P dans chacune de ses régions et ne coupant pas P. Σ et P ont alors un écart non nul et l'on peut déterminer un nombre λ tel que tous les tores d'ordre λ aient un diamètre inférieur à cet écart. Or chaque tore d'ordre λ contient des points de P. *Aucun d'eux ne coupera donc* Σ. De plus, l'ensemble des tores d'ordre λ contient tout P, dont il y a *des tores d'ordre* λ *dans chacune des deux régions de* Σ. La *même propriété a lieu pour les circonférences d'ordre* λ.

Soient T un tore particulier d'ordre $\lambda - 1$ et C_1, C_2, ..., C_k les k circonférences d'ordre λ qu'il contient. C_1 C_2 étant enlacées sont dans la même région de Σ, de même C_2 et C_3, ..., C_k et C_1

(n° **34**). Nous allons d'ailleurs reprendre la démonstration de cette propriété et en tirer d'autres conséquences.

Appelons $2i$ le cercle limité par C_{2i} et A_{2i-1} et A_{2i} les points d'intersection de L_{2i} respectivement avec C_{2i-1} et C_{2i+1}. Envisageons d'abord le cercle Γ_2 et les points A_1, A_2. Je dis que ces points peuvent être joints sur L_2 par une ligne polygonale ne coupant pas Σ. Enfermons en effet Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1, C_2 et C_3. Nous pouvons choisir ce domaine de façon que les cubes qui le constituent n'aient aucun de leurs sommets dans le plan de C_2 (n° **30**). La frontière de l'ensemble des points de D situés sur Γ_2 est alors formée d'un nombre fini de contours polygonaux I sans point multiple et sans point commun, ne touchant pas C_2. Le point A_1 n'est intérieur à aucun de ces polygones. Si, en effet, il était intérieur au contour I, C_1 serait enlacé avec I, ce qui est impossible puisque I appartient à D. De même, A_2 n'est intérieur à aucun des contours I. *Donc on peut joindre* A_1 *et* A_2 *sur* Γ_2 *par une ligne polygonale* α_2 *ne coupant pas* D, donc extérieure à D comme A_1 et A_2. α_2 *ne coupe pas* Σ qui est intérieure à D.

Construisons de même les lignes α_4, α_6, ..., α_k ne coupant pas Σ [1]. Appelons enfin α_{2i+1} l'un des deux arcs A_{2i}, A_{2i+1} de C_{2i+1}. L'ensemble de tous ces arcs forme une ligne fermée α ne coupant pas Σ, intérieure à T et enlacée avec l'axe de T. *Je vais prouver que, par une déformation homéomorphe de l'espace, n'altérant que l'intérieur de* T, *je peux passer de* α *à la circonférence d'ordre* $\lambda - 1$ *que contient* T.

81. Considérons d'abord l'arc α_2. Appelons β_2 le segment de droite $A_1 A_2$. On peut passer de α_2 à β_2 par une déformation de Γ_2 sur lui-même, n'altérant pas la frontière C_5. Ceci résulte du théorème du n° **26**. Mais la déformation qui est indiquée à ce numéro ne conviendra pas ici parce que les points A_1, A_2 ne restent pas fixes, alors que cette fixité me sera nécessaire. Mais α_2 étant une ligne polygonale, il n'y a pas de difficulté à réaliser cette condition.

---

[1] Je rappelle que le nombre k est pair.

Pour cela, remarquons que α_2 est partagé en tronçons par β_2. Il y a deux tronçons particuliers d'extrémités A_1 ou A_2. J'appellerai *tronçon de la première catégorie* un des tronçons restant et tel que le contour formé par ce tronçon et le segment rectiligne joignant ses extrémités ne contienne à son intérieur ni A_1 ni A_2. Par un raisonnement analogue à celui du n° **45**, je peux définir des déformations du type envisagé faisant disparaître ces tronçons de première catégorie et ceci en diminuant le nombre des extrémités de tronçons. Ces déformations faites, parcourons la nouvelle ligne α_2 de A_1 vers A_2 et appelons B le premier point de rencontre avec β_2. Sur le segment $A_1 B$, il n'y a pas d'extrémités de tronçons, car une telle extrémité appartiendrait nécessairement à un tronçon de la première catégorie, tronçon qui serait totalement intérieur au contour formé par l'arc $A_1 B$ et le segment $A_1 B$. Nous pouvons alors, par une déformation du type envisagé et portant sur un polygone un peu supérieur à celui limité par ce contour, faire disparaître l'extrémité B (*cf.* n° **45**). Cette opération ne fait d'ailleurs apparaître aucune nouvelle extrémité de tronçons et aucun tronçon de première catégorie. Je peux alors la répéter sur les extrémités restantes et j'arriverai à un arc α_2 n'ayant plus que ses extrémités A_1, A_2 en commun avec β_2. Une dernière déformation laissant ces extrémités fixes amènera finalement α_2 sur β_2.

Ceci étant, appliquons à la déformation totale et au cercle Γ_2 la propriété du n° **36**. Je la modifie légèrement en supposant qu'au lieu des normales à Γ_2, j'envisage une famille d'arcs de circonférence jouant le même rôle et dont C_1 et C_2 font partie. La détermination d'une telle famille ne présente aucune difficulté. *Je peux donc passer de* α_2 *à* β_2 *par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de* Γ_2, *laissant fixes les points* A_1, A_2 *et par suite les circonférences* C_1 *et* C_2. Faisons des déformations analogues pour les arcs $\alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_k$.

Après ces déformations, Σ sera devenue une autre surface simplement connexe Σ', les portions de Σ intérieures à T ayant seules été modifiées. Les arcs $\beta_2, \beta_4, \ldots, \beta_k$ et les arcs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ne coupent pas Σ' et si, par exemple, les circonférences C_i sont intérieures à Σ, ces arcs sont intérieurs à Σ'.

Considérons maintenant le cercle Γ_1 limité par C_1. Une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de Γ_1 permet de passer de α_1 au segment β_1, joignant A_k et A_1. Je fais la même déformation pour tous les arcs α_1, α_3, ... *J'obtiens ainsi une surface simplement connexe sans point multiple* Σ'' *qui n'est pas coupée par la courbe* β, *somme des arcs* β_i. Si d'ailleurs les courbes C_i sont intérieures à Σ, β est intérieur à Σ''. Les parties de Σ extérieures à T n'ayant pas été altérées, les circonférences d'ordre λ extérieures à T occupent la même position par rapport à Σ'' et à Σ.

La courbe β diffère très peu de la circonférence d'ordre $\lambda - 1$ que contient T. Une dernière déformation permet de passer de β à cette circonférence.

L'extérieur de T n'ayant pas été altéré, je peux répéter les mêmes opérations sur chacun des autres tores d'ordre $\lambda - 1$ sans modifier les propriétés acquises. Après ces opérations, j'arrive à une surface simplement connexe sans point multiple $\Sigma_{\lambda-1}$ ayant les propriétés suivantes :

$\Sigma_{\lambda-1}$ *ne coupe aucune des circonférences d'ordre* $\lambda - 1$. *Il y a des circonférences d'ordre* $\lambda - 1$ *dans chacune des régions de* $\Sigma_{\lambda-1}$, parce qu'il y avait des circonférences d'ordre λ dans chacune des régions de Σ.

82. $\Sigma_{\lambda-1}$ a donc par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 1$ la propriété qu'avait Σ par rapport aux circonférences d'ordre λ. Les mêmes raisonnements me permettront d'en déduire une surface $\Sigma_{\lambda-2}$ ayant les mêmes propriétés par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 2$ et de proche en proche j'arriverai à une surface simplement connexe Σ_2 ne coupant aucune des circonférences d'ordre 2 et en ayant dans chacune de ses régions. Or, ceci est impossible. En effet, les circonférences d'ordre 2 sont toutes intérieures au tore unique d'ordre 1 et par suite sont dans la même région de Σ_2 (n° **50**).

Il est donc impossible que Σ *ne coupe pas* P, ce qui démontre le théorème du n° **80** et achève la démonstration du théorème du n° **79**.

83. Soit Γ un arc de Jordan sans point multiple contenant P. Nous supposerons cet arc construit, par exemple, par le procédé indiqué au n° **72**, les polyèdres étant remplacés par les tores T. Γ *est un nouvel exemple d'un arc de Jordan dont la correspondance avec un segment de droite* γ *ne peut s'étendre à aucun voisinage.*

Si une correspondance entre Γ et γ pouvait s'étendre, il correspondrait à P un ensemble parfait discontinu p situé sur γ et l'on aurait en particulier une extension de la correspondance entre P et p. Nous venons de montrer qu'une telle extension est impossible.

La propriété est d'ailleurs vraie pour tout arc de Γ *ayant un point de* P *comme point intérieur au sens strict.* Si M est en effet un point de P intérieur à cet arc, il existe un ordre λ assez grand pour que les extrémités de l'arc soient extérieures au tore d'ordre λ qui contient M. L'arc, d'après la construction de Γ, contient alors toute la partie de P intérieure à ce tore, partie qui est un ensemble semblable à P.

84. De l'ensemble P, *je vais déduire deux ensembles* Q, Q′ *dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.* Q est la somme de deux ensembles P_1, P_2 égaux à P, les tores d'ordre 1, T_1, T_2, de ces ensembles étant enlacés. Q′ est la somme de deux ensembles P'_1, P'_2 égaux à P, les tores 1 d'ordre λ, T'_1, T'_2 de ces ensembles étant extérieurs l'un à l'autre et non enlacés. Il y a une correspondance immédiate entre Q et Q′ qui s'étend à leurs voisinages, celle qui résulte de l'égalité des quatre tores T_1, T_2, T'_1, T'_2, et des ensembles qu'ils contiennent. Je dis qu'il n'y a aucune correspondance entre Q et Q′ qui puisse s'étendre à tout l'espace. Supposons, en effet, qu'il y en ait une. Supposons T'_1, T'_2 assez écartés pour que je puisse construire une sphère Σ' ayant T'_2 à son intérieur et T'_1 à son extérieur. Σ' contient alors des points de Q′ dans chacune de ses régions et pas sur sa surface. Il lui correspond une surface simplement connexe sans point multiple Σ ayant la même propriété vis-à-vis de Q. Ceci est impossible, les raisonnements du n° **82** nous permettant de construire une surface simplement connexe sans point multiple ne coupant pas les deux circonférences d'ordre 1 de Q et en ayant une à son intérieur et

l'autre à son extérieur, ce qui est en contradiction avec le fait que ces circonférences sont enlacées.

85. Je déduis de Q et Q′ *deux arcs de Jordan* Γ, Γ′ *dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.* Γ est la somme de trois arcs Γ_1, Γ_2, Γ_3. L'arc Γ_1 est intérieur à T_1 et contient P_1; Γ_2 est intérieur à T_2 et contient P_2; Γ_3 joint une extrémité de Γ_1 et une extrémité de Γ_2 et c'est une ligne polygonale. Γ'_1, Γ'_2 sont respectivement égaux à Γ_1 et Γ_2, cette égalité résultant de celle des ensembles P et des tores T. Γ'_3 joint une extrémité de Γ'_1 à une extrémité de Γ'_2 et est une ligne polygonale. La correspondance entre Γ et Γ′ s'étend de suite à leurs voisinages.

Supposons qu'il y ait une correspondance entre Γ et Γ′ qui puisse s'étendre à tout l'espace. Supposons Γ'_3 choisi de façon qu'il soit coupé en un seul point A′ par la sphère Σ′ envisagée au n° **84**. La surface Σ correspondante coupe alors Γ en un seul point A. Mais cette surface coupe Q, donc A appartient à Q, puisque tout Q est sur Γ. La même propriété s'applique à tous les points d'une portion rectiligne de Γ'_3 voisine de A′. L'homologue de ce segment rectiligne serait donc une partie de Q, donc un ensemble discontinu, ce qui est impossible.

Cet exemple complète les résultats de la première Partie où nous avions indiqué une propriété de cette nature, mais pour une courbe fermée.

86. Le théorème du n° **80** a une allure paradoxale. Je vais en établir un autre de même nature.

Théorème. — *Soit* L *une courbe de Jordan extérieure à un des tores* T *de définition de* P *et enlacée avec la circonférence* C *lieu des centres des méridiens de* T. *Toute calotte simplement connexe* Σ *ayant* L *pour frontière coupe* P. *L'ensemble des points communs à* P *et à* Σ *n'est pas dénombrable.*

Je peux supposer que le tore T envisagé est le tore d'ordre 1, quitte à ne considérer que la partie de P intérieure à ce tore. Si l'on veut seulement montrer que P et Σ se coupent, on peut em-

ployer des raisonnements analogues à ceux qui ont servi pour le théorème du n° **80**. Si P et Σ ne se coupaient pas, il existerait un ordre λ tel qu'aucune des circonférences d'ordre λ ne couperait Σ. On en déduirait une autre calotte ayant même frontière L et ne coupant pas C. Ceci est impossible puisque L et C sont enlacées.

Pour démontrer en même temps que *l'ensemble des points communs à* P *et* Σ *n'est pas dénombrable*, il faut employer un autre procédé. Pour la symétrie des notations, j'affecterai de l'indice 1 les lettres (sauf P) qui figurent dans l'énoncé. Je vais alors établir le lemme suivant.

87. LEMME. — *Il existe sur* Σ_1 *une courbe* L_2 *extérieure à un des tores d'ordre* 2, *soit* T_2, *et enlacée avec la circonférence* C_2 *d'ordre* 2 *qu'il contient.*

Supposons qu'il n'existe pas de courbes L_2 satisfaisant à ces conditions. A chaque tore T_2 d'ordre 2, j'adjoins un tore parallèle et extérieur T'_2 assez voisin pour que la chaîne des tores T'_2 ait les mêmes propriétés d'enlacement que la chaîne des tores T_2. Je montrerai que *je peux déterminer sur chaque tore* T'_2 *une courbe ne coupant pas* Σ, *non enlacée avec la circonférence d'ordre* 2 *intérieure à* T'_2 *et enlacée avec l'axe de ce tore.* Des déformations de l'espace n'altérant que le voisinage des tores T'_2 peuvent amener ces courbes à être des parallèles des tores T'_2. La chaîne formée par ces parallèles est analogue à la chaîne des circonférences d'ordre 2 et elle ne coupe pas la nouvelle surface déduite de Σ_1 par ces déformations, surface qui a encore L_1 pour frontière. Ceci est impossible, car on en déduirait une autre calotte de même frontière ne coupant pas C_1, qui est enlacée avec L.

Il suffit donc de prouver que, s'il n'existe pas sur Σ_1 de courbe extérieure à un tore T_2 d'ordre 2 et enlacée avec la circonférence C_2 d'ordre 2 qu'il contient, on peut déterminer sur T'_2 une courbe ne coupant pas Σ_1, non enlacée avec C_2 et enlacée avec l'axe de T_2.

Si Σ_1 ne coupe pas T'_2, la courbe cherchée est immédiate : ce sera par exemple un parallèle de T'_2. Supposons que Σ_1 coupe T'_2 et soit H l'ensemble de leurs points communs. Soit d'autre part θ l'écart de T_2 avec T'_2. Par des raisonnements analogues à ceux des

n^os **31** et suivants, je peux prouver que : 1° il existe un nombre η tel que, si M_1, M_2 sont deux points de Σ_1 distants de moins de η, on peut les joindre sur Σ_1 par un chemin intérieur à une sphère de diamètre θ; 2° il existe un nombre ε tel que toute courbe J dont chaque point a avec H un écart inférieur à ε peut être amenée sur Σ_1 par une déformation au cours de laquelle chacun de ses points garde avec H un écart inférieur à θ. Au cours de cette déformation, on ne rencontrera donc pas T_2 et l'on restera à l'extérieur de T_2. Donc le coefficient d'enlacement de J avec C_2 ne change pas. Mais on arrive à une courbe tracée sur Σ_1 et extérieure à T_2, donc non enlacée avec C_2. Par suite, toute courbe telle que J n'est pas enlacée avec C_2.

ε étant ainsi déterminé, pavons l'espace à l'aide de cubes de diamètre inférieur à ε et gardons ceux de ces cubes qui touchent H. Ils forment des domaines D et *toute courbe de* D *est non enlacée avec* C_2. Je supposerai D choisi de façon que sa frontière coupe T'_2 suivant un nombre fini de courbes I sans point multiple et sans point commun (n° **30**). Les courbes I existent, sans quoi un méridien de T'_2 serait intérieur à D, ce qui est impossible puisqu'il est enlacé avec C_2. *Les courbes* I *ne touchent pas* H, *donc* Σ_1, *et ne sont pas enlacées avec* C_2. Leur coefficient d'enlacement avec l'axe de T_2 est donc 0 ou 1. Si ce coefficient est 1 pour l'une d'elles, cette courbe sera la courbe cherchée.

Supposons que ce coefficient soit 0 pour toutes les courbes I. Si je fais la représentation de T'_2 sur un plan II (n° **39**), les représentations de ces courbes sont des courbes fermées i. Un raisonnement analogue à celui du n° **30** montre alors que la région de II extérieure à toutes les courbes i représente des points n'appartenant pas à D. Traçons alors un segment de droite ab représentant un parallèle, a et b étant dans cette région. Les diverses représentations d'une courbe I particulière découpent ab en tronçons : considérons ceux de ces tronçons intérieurs aux représentations de I et reportons-les sur toutes les représentations de I. Il y en a un dont les extrémités sont consécutives sur i, soit a_1 b_1. a_1 b_1 et l'arc a_1 b_1 de i délimitent alors une région de II représentant de façon biunivoque une portion de T'_2 (n° **42**). Je peux alors rem-

placer un segment un peu supérieur à $a_1 b_1$ par un arc très voisin de l'arc $a_1 b_1$ de i et extérieur à i de façon que le nouvel arc ab représente encore une courbe sans point multiple non enlacée avec C_2 et enlacée avec l'axe de T'_2. Je ferai de même pour les tronçons du type de $a_1 b_1$ qui apparaissent alors obligatoirement et ceci jusqu'à ne plus avoir de points intérieurs aux représentations de la courbe I envisagée. Je fais de même pour chacune des courbes I. La courbe obtenue finalement représente une courbe ne touchant pas D, donc ne touchant pas Σ_1. Cette courbe n'est pas enlacée avec C_2 et est enlacée avec l'axe de T'_2. C'est donc la courbe que je cherche sur T'_2. Le lemme est ainsi démontré.

Remarquons que, dans la démonstration, j'avais seulement fait intervenir la condition qu'il n'existait pas de courbe L_2 *dans le voisinage de* T'_2. J'amenais en effet la courbe J sur Σ_1, chaque point de J ayant toujours un écart inférieur à θ avec H. Donc, non seulement L_2 existe, mais encore il existe des courbes L_2 intérieures à T_1.

88. Le lemme précédent peut être complété ainsi : *Non seulement* L_2 *existe, mais il existe une autre courbe* L'_2 *ayant la même propriété, les deux calottes* Σ_2, Σ'_2 *découpées par ces courbes dans* Σ_1 *n'ayant pas de point commun.*

Au cours de la démonstration de cette proposition, j'introduirai un certain nombre de courbes fermées tracées sur Σ_1. J'appellerai *intérieur de l'une de ces courbes*, la calotte simplement connexe qu'elle découpe dans Σ_1 et *extérieur* le reste de Σ_1. Ces dénominations s'appliqueraient, en somme, à une représentation de Σ_1 sur un cercle. D'un autre côté, j'associerai à chaque tore T_2 d'ordre 2, deux tores parallèles et extérieurs, l'un Q_2 à la distance θ de T_2, l'autre R_2 à la distance 2θ. θ est supposé assez petit pour que les tores R_2 (et par suite les tores Q_2) forment à l'intérieur de T_1 une chaîne analogue à la chaîne des tores T_2.

Nous avons vu que nous pouvions choisir L_2 aussi voisin qu'on veut de l'un des tores T_2. Je choisirai cette courbe assez voisine de l'un des tores T_2 pour qu'elle soit extérieure à tous les tores T_2. Je prends alors θ inférieur à la moitié de l'écart de L_2 et des tores T_2.

Je construis une surface polyédrale S_1, voisine de Σ_1, et lui correspondant, les points homologues de S_1 et Σ_1 ayant toujours un écart inférieur à θ. Je choisis cette surface de façon qu'aucune de ses arêtes ni de ses faces ne soit tangente aux tores Q_2 et qu'aucun sommet ne soit sur ces tores. Dans ces conditions, l'intersection de S_1 et des tores Q_2 a pour homologue sur Σ_1 un nombre fini de courbes sans point multiple et sans point commun. Aucune de ces courbes ne coupe L_2 et si l'une d'elles correspond à l'intersection de S_1 et d'un certain tore Q_2, elle est extérieure au tore T_2 correspondant et intérieure au tore R_2.

Parmi ces courbes, il peut y en avoir qui ont L_2 à leur intérieur. Dans ce cas, il y en a une F qui les contient toutes. J'appelle Σ' l'extérieur de F (l'extérieur de L_2, si F n'existe pas). Je désignerai par G une quelconque des courbes restantes, situées sur Σ'. *Si l'une des courbes* G *est enlacée avec une des circonférences* C_2, *ce sera la courbe* L'_2 *cherchée.* Nous allons montrer qu'en supposant que chacune des courbes G n'est enlacée avec aucune des circonférences C_2, nous arrivons à une contradiction, ce qui prouvera l'existence de L'_2.

Supposons qu'il en soit ainsi. *La partie d'un seul tenant de* Σ', *extérieure aux courbes* G, *ne contient aucun point des courbes* C_2. Cette partie est, en effet, tout entière extérieure aux tores T_2 : Un point de T_2 est à une distance de Q_2 égale à θ, donc son homologue sur S_1 est intérieur à Q_2; on ne peut atteindre ce point sur S_1, à partir d'un point de l'homologue de L_1, qu'en traversant le tore Q_2; donc on ne peut atteindre un point de T_2, à partir de L_2, sur Σ_1, qu'en traversant une courbe G. Les frontières L_1 et G de cette partie de Σ' ne sont pas enlacées avec les courbes C_2. Donc le reste de sa frontière F n'est enlacé avec aucune des courbes C_2. Ceci prouve déjà que F n'est pas la courbe L_2 qui est enlacée avec une des courbes C_2.

Soit J *une courbe tracée sur* Σ' *et extérieure à l'un des tores* R_2. *Je dis qu'elle n'est pas enlacée avec la circonférence* C_2 *que contient* R_2. J étant extérieure à R_2 ne coupe aucune des courbes G qui proviennent du tore Q_2 intérieur à R_2. La portion de Σ' intérieure à J et extérieure à ces courbes G particulières est donc extérieure à T_2

et par suite ne contient aucun point de la circonférence C_2 intérieure à R_2. Les courbes G faisant partie de sa frontière ne sont pas enlacées avec C_2, de même que F (dans le cas où F ferait aussi partie de cette frontière). Donc le reste de cette frontière, c'est-à-dire J, n'est pas enlacé avec cette circonférence C_2.

Ceci étant, je peux appliquer à Σ' et aux tores R_2 les raisonnements faits au n° **87** sur Σ_1 et les tores T_2. Il existe sur chaque tore R_2 une courbe ne coupant pas Σ', enlacée avec l'axe de R_2 et non enlacée avec la courbe C_2 que contient R_2. Des déformations n'altérant que le voisinage des tores R_2 permettent de prendre pour ces courbes un parallèle C'_2 sur chaque tore R_2, Σ' étant transformée en une autre surface que j'appelle encore Σ', ayant pour frontière la courbe L_1 et une courbe que j'appelle encore F, qui est intérieure à l'un des tores R_2, tore que je désignerai par R. J'appellerai de même C′ le parallèle C'_2 pris sur ce tore et je supposerai que c'est le cercle de gorge de R.

Les courbes C'_2 forment à l'intérieur de T_1 une chaîne analogue à la chaîne des courbes C_2. Σ' a un écart non nul avec ces courbes. On peut déterminer un nombre ε tel que toute courbe dont chaque point a, avec Σ', un écart inférieur à ε peut être amené sur Σ' sans couper aucune des courbes C'_2. Mais toute courbe tracée sur Σ' se ramène à zéro, ou à L_1, donc n'est enlacée avec aucune des courbes C'_2. *On peut donc enfermer Σ' dans un domaine polyédral non enlacé avec les courbes C'_2.*

Grâce à ce domaine polyédral, je peux, comme aux n^{os} **80** et **81**, construire une courbe α ne coupant pas Σ', intérieure à T_1 et enlacée avec l'axe de T_1, donc avec L_1. Prenons une précaution pour construire une partie de α. Soient A, B les deux points de rencontre avec le cercle limité par C′ (relatif au tore particulier R qui contient F) des deux courbes C'_2 enlacées avec C′. Pour former α, je prendrai d'abord une ligne polygonale joignant AB sans couper Σ' et intérieure au cercle limité par C′. Comme arcs des courbes C'_2 enlacées avec C′, je prendrai deux arcs qui, au voisinage de A et B sont du même côté du plan de C′. Grâce à cette précaution, je peux réduire R à un point sans couper α. Il en est de même de F, intérieur à R. Donc F n'est pas enlacée avec α.

La contradiction cherchée réside dans le fait que α ne coupe pas Σ', n'est pas enlacée avec F et est enlacée avec L_1.

L'_2 *existe donc et peut être prise* parmi les courbes G, donc est, *comme* L_2, *intérieur à* T_1.

89. Appelons *courbe d'ordre* 1, la courbe L_1 et courbes d'ordre 2, les deux courbes L_2, L'_2 qui viennent d'être mises en évidence. L_2 joue par rapport à un tore d'ordre 2 le rôle que joue L_1 par rapport au tore d'ordre 1. Je peux donc construire à l'intérieur de L_2 deux courbes L_3, L'_3 (courbes d'ordre 3) extérieures l'une à l'autre, intérieures à un tore d'ordre 2 et jouant chacune par rapport à un tore d'ordre 3 le rôle de L_1 par rapport à T_1. Je fais de même pour L'_2 et je continue ces opérations indéfiniment.

L'infinité dénombrable des courbes L *satisfait, par construction aux conditions a et b'* du n° **73** : toutes les courbes d'ordre λ sont extérieures les unes aux autres; à l'intérieur d'une courbe d'ordre λ il y a deux courbes d'ordre $\lambda+1$ et chaque courbe d'ordre $\lambda+1$ est intérieure à une courbe d'ordre λ. De plus, une courbe d'ordre λ est intérieure à un tore d'ordre $\lambda-1$, donc le diamètre maximum des courbes d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment (*condition c*). En prenant l'intermédiaire d'une représentation de Σ_1 sur un cercle, on en déduit que les courbes L définissent sur Σ_1 un *ensemble parfait partout discontinu* P' qui est l'ensemble des points de Σ_1 intérieures à une infinité des courbes L.

Je dis que P' *appartient à* P. En effet, un point M de P' est intérieur à une suite de courbes L comprenant une courbe et une seule de chaque ordre. C'est le point limite unique d'une suite de points pris un et un seul sur chacune des courbes de la suite précédente. Or le point pris sur la courbe d'ordre λ est intérieur à un tore d'ordre $\lambda-1$. Donc M est un point de P.

Il en résulte que, non seulement P et Σ_1 se coupent, mais que, *parmi les points communs à* P *et à* Σ_1, *il y en a formant un ensemble parfait, donc non dénombrable.*

90. Comme courbe L_1 nous pouvons prendre un méridien ou un parallèle d'un des tores de définition de P. Si nous considérons l'arc

de Jordan Γ qui contient P (arc que je peux supposer ne pas couper L_1), *toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant* L_1 *pour frontière coupe* Γ *et parmi les points d'intersection, il y en a une infinité non dénombrable appartenant à l'ensemble* P.

C'est un fait de même nature que celui démontré au n° **61**. Nous avons cependant ici cette circonstance plus paradoxale que la courbe Γ (qui joue le rôle de la courbe C_2 du n° **61**) est une courbe ouverte et que parmi les points d'intersection, il y en a une infinité non dénombrable appartenant à un ensemble discontinu *particulier* situé sur Γ.

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 31 mai 1921.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. BATAILLON.

Vu et permis d'imprimer :

Strasbourg, le 1er juin 1921.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE STRASBOURG,

S. CHARLÉTY.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Les séries trigonométriques.

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 31 mai 1921.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

E. BATAILLON.

Vu et permis d'imprimer :

Strasbourg, le 1er juin 1921.

Le Recteur de l'Académie de Strasbourg,

S. CHARLÉTY.

65127-21 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION..... 1

PREMIÈRE PARTIE. — LES COURBES DE JORDAN.

CHAP. I. — *Les courbes planes.*

I. Correspondance entre les polygones plans..... 6
II. Définition et propriétés des chaînons et des chaînes..... 8
III. Correspondance entre les plans de deux courbes fermées..... 12
IV. Correspondance entre les plans de deux courbes ouvertes..... 21
V. Généralisations et applications..... 27

CHAP. II. — *Les courbes de Jordan dans l'espace à trois dimensions.*

I. Remarques sur les variétés enlacées et les surfaces simplement connexes..... 36
II. Les courbes planes et les courbes sphériques..... 44
III. Les courbes tracées sur le tore..... 46
IV. Exemples de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes..... 65
V. Correspondance entre les ensembles de courbes..... 70

SECONDE PARTIE. — LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS BORNÉS.

CHAP. I. Propriétés générales des ensembles fermés discontinus..... 75

CHAP. II. Les ensembles parfaits partout discontinus plans..... 87

CHAP. III. Les ensembles parfaits partout discontinus dans l'espace à trois dimensions..... 91

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
65127 Quai des Grands-Augustins, 55.